

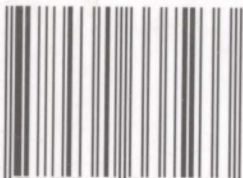
21世纪高等院校教材

泛函分析引论

曹怀信 主编

陕西师范大学出版社

责任人 田均利
封面设计 徐 明



ISBN 7-5613-3723-X/O·105
定价：18.00元

21 世纪高等院校教材

泛函分析引论

主　编　曹怀信

编　者　曹怀信　张建华

　　　　陈峥立

陕西师范大学出版社

图书代号:JC6N0870

泛函分析引论

主编　曹怀信

责任人	田均利
封面设计	徐　明
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　刷	陕西宏业印务有限公司
开　　本	787×960　1/16
印　　张	11.25
插　　页	2
字　　数	198 千
版　　次	2006 年 8 月第 1 版
印　　次	2006 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 7—5613—3723—X/O·105
定　　价	18.00 元

开户行:光大银行西安电子城支行　账号:0303080—00304001602

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)85251046(传真)　85233753　85307864

E—mail:if—centre@snuph.com

前 言

无穷维线性空间是描述具有无穷多个自由度的物理系统的有力工具. 泛函分析则是研究无穷维线性空间及其上的泛函与算子理论的一门分析数学. 它是现代数学中的一个较新的重要分支. 泛函分析的基本概念与方法起源于经典数理过程中的一些变分问题、边值问题, 概括了经典数学分析与函数论中的某些重要概念、问题与结果. 由于量子力学、现代工程技术与现代力学的深刻影响, 使得这门新兴学科迅速发展. 从上世纪中叶开始, 偏微分方程理论、概率论、计算数学, 由于运用了泛函分析的方法与结果得到大发展. 它综合运用分析、代数、几何与拓扑的方法与观点, 研究分析数学、现代物理、现代方程技术中出现的许多重要问题, 有着广泛而有效的应用. 现在, 泛函分析的概念与方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学, 理论物理及现代工程技术理论的许多分支, 例如, 微分方程、概率论、逼近论、计算数学、量子声场论、统计物理、抽象调和分析、现代控制论与系统论、最优化理论与大范围微分几何、量子计算等许多方法.

泛函分析大体可分为两部分: 一是空间理论, 它研究距离空间、赋范线性空间、Hilbert 空间及一般的拓扑线性空间理论; 另一部分是算子理论, 它可分为线性算子理论与非线性算子理论. 研究线性算子的称为线性泛函分析, 研究非线性算子的称为非线性泛函分析.

由于泛函分析内容之丰富, 不可能用一本专门的书将全部内容都写出来. 因此, 为大学生与其他科技工作者写一本通俗易懂、直观明了的入门书就显的十分必要了. 最近几年, 国内已有许多为本科生与研究生使用的泛函分析教材. 但在写法上大都是以传统的公理体系为基础的推理与演绎. 为了能使学生了解问题的来源与背景, 养成研究性学习的良好习惯, 并培养学生分析问题与解决问题的能力, 我们力求从一些问题中提炼出泛函分析的基本概念与问题, 在讨论有关概念的属性时, 先说明要解决什么问题, 在问题的分析当中逐步引入适当的概念, 再加上适当的条件, 最后给出合理的叙述, 证明便蕴含在分析之中了. 这样或许能使读者不仅学到泛函分析的基本理论, 而且更重要的是领悟到研究问

题与解决问题的方法与技校巧.

与一般教材相比，除了以上讲法（即研究性、分析式教学法）的不同，考虑到篇幅的限制，我们削减了“Hilbert 空间上算子理论”与“算子谱论”的内容，增添了“非线性算子”一章. 旨在使读者了解一点具有广泛应用的非线性泛函分析的简单概念、方法与结论，同时又能看到微积分中关于函数的一些概念如何推广到一般的抽象函数乃至非线性算子.

关于记号的说明：$\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}$ 分别表示全体复数、全体实数、全体整数、全体自然数、全体有理数之集；$\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{R}^n$ 为复与实的 n 维欧氏空间；“$\in$”表示属于；$A \subset B$ 表示 A 为 B 的子集；$\bigcup$ 与 $\bigcap$ 分别表示并与交；$A \setminus B$ 表示差集；用 A^c 表示集合 A 关于指定集合的余集；$A \times B$ 表示笛卡尔积；“$:=$”表示定义为；“$\exists$”表示存在；$\varnothing$ 表示空集；“$\Rightarrow$”表示蕴含；“$\Leftrightarrow$”表示互相蕴含（当且仅当）.

限于水平,错漏难免,欢迎批评指正.

编　者

2006 年 5 月

目　录

第一章　空间理论

前言中已经指出，泛函分析研究的对象是定义在线性空间上的泛函与算子．为了深入研究泛函与算子，我们首先要讨论一下它们的定义域空间，包括：距离空间、赋范线性空间与 Hilbert 空间．

在研究某些物理系统时，往往要用无穷多个参数来决定系统的状态．例如，一个物体在一点 $\vec{\tau}$ 处的温度 $\theta(\vec{\tau})$ 与某种信号在时刻 t 的情况 $x(t)$ 等都是由无穷多个参数值决定．一般来说系统的状态可用函数或数列来描述．因此，从数学上来看就是要研究某种函数或数列．为了全面研究系统的变化规律，不单是考虑个别状态，而要研究某些状态的集合．从数学上来说，就是要研究函数或数列之集．由于两个信号可以叠加，一个信号可以放大或缩小，因而在以上的函数或数列之集中引入加法与数乘，即引入线性空间结构是自然的．在处理实际问题（如天气预测等）时，系统的状态总是观测得到，而观测必有误差，是近似值．为了得到合乎实际的结果，要求近似值可以“任意逼近”精确性．为了准确描述“任意逼近”的概念，还需要在线性空间中引入距离的概念．这就是所谓“赋有距离的线性空间”，即赋范线性空间．

§1.1　距离空间

1.1.1 定义与例子

为了描述“任意逼近”的概念，需要引入两个状态(研究对象)之间的距离，用它来刻画两状态的远近程度．如果将每个状态叫做一个点，则距离这个数应满足一下条件：

1° 任意一点到自身的距离为零，任意两个不同点之间的距离大于零；

2° 从 x 到 y 的距离等于从 y 到 x 的距离；

3° 直线段最短， 即从 x 到 y 的距离不超过从 x 到 z 的距离与从 z 到 y 的距离之和．

由此我们引入以下定义．

定义 1.1.1 设 E 是任一非空集合，如果存在二元函数 $\rho: E\times E\to \mathbf{R}$ 使得 $\forall x,y,z\in E$，有

(M_1)　$\rho(x,y)\geq 0;\ \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$；

(M_2)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

$(M_3)\quad \rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$，

则称 ρ 是集 E 上的一个距离（或度量），称 $\rho(x,y)$ 是点 x 与 y 之间的距离，称二元序对 (E,ρ) 为距离空间，简称 E 是距离空间（或度量空间）.

例 1 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义

$$\rho_1(P,Q)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

$$\rho_2(P,Q)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_\infty(P,Q)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|,$$

则 ρ_1,ρ_2 与 ρ_∞ 都是 $\mathbf{R}^n$ 上的距离.

易见,对任意 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,有

$$\rho_2(P,Q)\le\rho_1(P,Q)\le n\rho_\infty(P,Q).$$

一般地，$\rho_p(P,Q)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ $(1\le p<\infty)$ 也定义了 $\mathbf{R}^n$ 上的距离. 对于 $\mathbf{C}^n$ 也可类似定义距离 ρ_p，从而它成为距离空间. 若不特别指明，则视 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 赋距离 ρ_2 .

例 2 记 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全体连续函数之集，对于 $f,g\in C[a,b]$，定义

$$\rho_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|dt,$$

$$\rho_\infty(f,g)=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|,$$

则 ρ_1，ρ_∞ 都是 $C[a,b]$ 上的距离. 若不特别指明，则视 $C[a,b]$ 上赋距离 ρ_∞ .

例 3 记 $S(\mathbf{K})=\{\{x_n\}:x_n\in\mathbf{K}\ (n=1,2,\cdots)\}$ 是 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的数列的全体. 对 $x=\{x_n\}$ 与 $y=\{y_n\}\in S(\mathbf{K})$，定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n(|x_n-y_n|+1)},$$

则 $(S(\mathbf{K}),\rho)$ 是距离空间，称为序列空间.

例 4 设 E 是任一非空集，定义 $\rho=E\times E\to\mathbf{R}$ 为

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

则(E,ρ)是距离空间，称为离散空间.

可见，任一非空集上都可定义距离使其成为距离空间.

例 5　若(E,ρ)是距离空间，定义$\overline{\rho}:E\times E\to\mathbf{R}$为

$$\overline{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

则$\overline{\rho}$也是E上的距离，其证明由函数$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$在$[0,\infty)$上的递增性可知. 可见，一个集上可有很多种距离.

如果(E,ρ)是距离空间，E_1是E的非空子集，则ρ限制在$E_1\times E_1$上成为E_1上的距离. 于是(E_1,ρ)也是一个距离空间，叫做(E,ρ)的子空间. 例如$([a,b],\rho_1)$是$(\mathbf{R},\rho_1)$的子空间，其中$\rho_1(x,y)=|x-y|$.

1.1.2　完备距离空间

在距离空间中，因为有了距离便可考虑“任意接近”的问题即收敛性问题. 数列以及点列是数学分析的重要概念. 因此我们有必要将点列的收敛问题引入到一般的距离空间之中.

定义 1.1.2 设(E,ρ)是距离空间，$x_n\in E\ (n\in\mathbf{N})$. 如果存在$x_0\in E$使得

$$\rho(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty),$$

则称点列$\{x_n\}$收敛，且称x_0为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，或记为$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，此时亦称$\{x_n\}$收敛于$x_0$.

收敛点列的极限是否唯一呢？若在(E,ρ)中，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y_0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_0)=0.$$

于是$\forall\varepsilon>0$，存在N_1与N_2，使得

$$n>N_1\Rightarrow\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n>N_2\Rightarrow\rho(x_n,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当$n>\max\{N_1,N_2\}$时，有

$$\rho(x_0,y_0)\le\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)<\varepsilon.$$

由于ε的任意性，从而$\rho(x_0,y_0)=0$，即$x_0=y_0$. 可见，距离空间中收敛点列的极限必唯一. 类似可以证明关于数列的有界性定理与子列定理也成立. 于是，得到

定理 1.1.3 若$\{x_n\}$为距离空间(E,ρ)中的收敛点列，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则

（1）x_0由$\{x_n\}$唯一确定；

（2）$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$也收敛于x_0；

（3）$\{x_n\}$有界，即存在$a\in E$及$\mathbf{M}>0$使得

$$\rho(x_n,a)\le M\ (\forall n\in\mathbf{N}).$$

例 6 （i）$(\mathbf{R}^n,\rho_p)$中点列的收敛性等价于按坐标收敛， 即

$$P_k\xrightarrow{\rho_p}P_0\Leftrightarrow\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}\text{有}x_i^{(k)}\to x_i^{(0)},$$

其中

$$P_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),\ P_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n.$$

（ii）$(C[a,b],\rho_\infty)$中的点列以ρ_∞收敛等价于函数列在$[a,b]$上的一致收敛（应用一致收敛的 Cauchy 准则）.

（iii）离散空间(E,ρ)中点列$\{x_n\}$收敛于x_0当且仅当

$$x_n\equiv x_0\ (n=1,2,\cdots),$$

即$\{x_n\}$为常点列.

例 7 设$E\subset\mathbf{R}^n$是 Lebesgue 可测集，且$mE<\infty$. 记$M(E)$是E上所有几乎处处有限的可测函数之集，其中几乎处处相等的函数视为同一元素. 对$f,g\in M(E)$，定义

$$\rho(f,g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt,$$

则ρ是$M(E)$上的距离且

$$f_n\xrightarrow{\rho}f\Leftrightarrow f_n(t)\overset{E}{\Rightarrow}f(t),$$

其中"$\overset{E}{\Rightarrow}$"表示在E上依测度收敛，$f_n\xrightarrow{\rho}f$表示以距离ρ收敛.

证明 显然，ρ满足距离公理的(M_1)与(M_2). 应用函数

$$f(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$$

在$[0,\infty)$上的递增性可知，ρ也满足(M_3). 从而ρ为$M(E)$上的距离.

设 $f_n, f \in M(E)$，且 $f_n \xrightarrow{\rho} f\ (n\to\infty)$，则 $\forall \sigma > 0$ 有

$$\rho(f_n, f) = \int_E \frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt$$

$$\geq \int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)} \frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt$$

$$\geq \int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)} \frac{\sigma}{1+\sigma}dt$$

$$= \frac{\sigma}{1+\sigma}\cdot mE(|f_n - f|\geq\sigma)(n=1,2,\cdots).$$

因此，$mE(|f_n-f|\geq\sigma)\to 0\ (n\to\infty)$，故 $f_n(t)\overset{E}{\Rightarrow} f(t)$.

反之，若 $f_n(t)\overset{E}{\Rightarrow} f(t)$，则 $\forall\sigma>0$ 有

$$\rho(f_n, f) \leq \int_{E(|f_n-f|\geq\sigma)} \frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt$$

$$+\int_{E(|f_n-f|<\sigma)} \frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt$$

$$\leq mE(|f_n-f|\geq\sigma)+\frac{\sigma}{\sigma+1}mE.$$

令 $n\to\infty$，再令 $\sigma\to 0^+$ 可知：$\rho(f_n, f)\to 0\ (n\to\infty)$，故 $f_n \xrightarrow{\rho} f$．这证明了在距离空间 $(M(E),\rho)$ 中

$$f_n\to f\ (n\to\infty) \Leftrightarrow f_n(t)\overset{E}{\Rightarrow} f(t).$$

数学分析告诉我们：数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 是基本列（即 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$ 使得当 $m,n>N$ 时，有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$）．这一结论在距离空间中是否成立呢？首先，我们把基本列的概念推广到距离空间之中．

定义 1.1.4　若距离空间 (E,ρ) 中的点列 $\{x_n\}$ 满足：$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$ 使得当 $m,n>N$ 时，有 $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 为 (E,ρ) 中的基本列（或 Cauchy 列）．

基本列与收敛点列有何关系呢？若 $\{x_n\}$ 为距离空间 (E,ρ) 中的收敛点列且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，则 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$ 使得当 $n>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$．从而当

$m,n>N$ 时，有

$$\rho(x_m,x_n)\le\rho(x_m,x_0)+\rho(x_n,x_0)<\varepsilon,$$

可见，$\{x_n\}$ 为基本列．因此，收敛点列必为基本列．反之如何呢？容易看出：点列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是 $(\mathbf{Q},\rho_1)$ 中的基本列（因为它在 $(\mathbf{R},\rho_1)$ 中收敛）．但它在 $(\mathbf{Q},\rho_1)$ 中不收敛．这说明在距离空间中，基本列不一定收敛．为此，我们引入以下定义．

定义 1.1.5 若距离空间 (E,ρ) 中的任一基本列都收敛，则称 (E,ρ) 是完备的，亦称 ρ 是完备距离．

例 8 离散空间 (E,ρ) 是完备的．

事实上，$\{x_n\}$ 为 (E,ρ) 中的基本列等价于 $\{x_n\}$ 为近似常点列，即当 n 充分大时，有 $x_n=x_{n+1}=\cdots=x_m=\cdots$．

例 9 $(C[a,b],\rho_1)$ 不是完备的，但 $(C[a,b],\rho_\infty)$ 完备．

证明 记 $c=\dfrac{1}{2}(a+b)$，$f_n(t)=\arctan(t-c)$，则

$f_n\in C[a,b]\ (n=1,2,\cdots)$ 且当 $t\in[a,b]$ 时，有

$$f_n(t)\to f(t)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t-c)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, c<t\le b,\\ 0,\quad t=c,\\ -\dfrac{\pi}{2}, a\le t<c.\end{cases}$$

由勒贝格控制收敛定理知

$$\rho_1(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty).$$

但是 f 既不属于 $C[a,b]$ 也不对等于一个连续函数，故 $\{f_n\}$ 在 $(C[a,b],\rho_1)$ 中不收敛．由 $\rho_1(f_n,f)\to 0$ 可知，$\{f_n\}$ 为 $(C[a,b],\rho_1)$ 中的基本列．因此，$(C[a,b],\rho_1)$ 是不完备的距离空间．至于 $(C[a,b],\rho_\infty)$ 的完备性，本质上是一致收敛的 Cauchy 准则．

从直观上来说，完备距离空间就是 Cauchy 收敛准则成立的空间．在数学分析中我们知道：Cauchy 准则、闭区间套定理、有限覆盖定理等重要结论在实数系 $\mathbf{R}$ 中成立，而在有理数系 $\mathbf{Q}$ 中不成立．基于这点，我们说实数系 $\mathbf{R}$ 是完备的，而有理数系 $\mathbf{Q}$ 不完备，为了克服有理数系的不足，引入了实数系，称后者为前者的完备化．应用这种想法与方法，我们可将不完备的距离空间完备化．有兴趣的读者可参考 Conway 泛涵分析．

1.1.3　开集与闭集

在数学分析与实变函数论中我们学习了$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的开集、闭集与紧集的概念，并利用开集、闭集刻画了函数的连续性．为了研究距离空间映射的连续性，必须将开集、闭集等概念推广到一般的距离空间．

设(E,ρ)是一距离空间，$x_0\in E$，称E中的点集

$$B(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\ \rho(x,x_0)<r\},$$

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\ \rho(x,x_0)\le r\},$$

分别为以点x_0为中心、r为半径的开球与闭球．$B(x_0,r)$又叫点x_0的$r-$邻域，简称为x_0的邻域．又称点集

$$S(x_0,r)=\{x\mid x\in E,\ \rho(x,x_0)=r\}$$

是以点x_0为中心、以r为半径的球面，其中$r>0$．

定义 1.1.6　设M是距离空间(E,ρ)的子集，点$x_0\in E$叫做M的内点，指存在$B(x_0,r)\subset M$．M的所有内点之集称为M的内部，记为M°．如果$M=M^\circ$，则称M是(E,ρ)中的开集．

例 10　(i) 离散空间(E,ρ)中，任一子集M是开集，因为对于任意$x_0\in E$，存在$\delta>0$使得$B(x_0,\delta)=\{x_0\}\subset M$；

(ii) 在(E,ρ)中，开球$B(x_0,r)$，E及$\varnothing$恒为开集;

(iii) 若$M\subset(E,\rho)$，则M的内部M°恒为开集．

证明　与$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的证明类似．

类似于$(\mathbf{R}^n,\rho_2)$中的情况，可以证明开集具有以下性质：

定理 1.1.7　在距离空间中，有限多个开集之交是开集，任意多个开集之并仍为开集．

下面给出聚点与接触点的定义，由此得到闭集的概念．

定义 1.1.8　设M为距离空间(E,ρ)的子集．点$x_0\in E$称为M的聚点，指$\forall r>0$，

$$(B(x_0,r)-\{x_0\})\cap M\neq\varnothing.$$

点$x_0\in E$称为M的接触点，指$\forall r>0$，有

$$B(x_0,r)\cap \mathrm{M}\neq\varnothing.$$

M的全体接触点之集称为M的闭包，记为$\overline{M}$．如果$M=\overline{M}$，则称M为闭集．

显然，聚点必是接触点，接触点分为聚点与孤立点（即存在$r>0$使得

$$B(x_0,r)\cap M=\{x_0\}）.$$

类似$\mathbf{R}^n$中的情况，可以证明

定理 1.1.9 设$x_0 \in (E,\rho)$，$M \subset E$，则

(1) x_0是M聚点$\Leftrightarrow$存在点列$\{x_n\} \subset M \setminus \{x_0\}$使得$x_n \to x_0\ (n \to \infty)$；

(2) x_0是M的接触点$\Leftrightarrow$存在点列$\{x_n\} \subset M$使得$x_n \to x_0\ (n \to \infty)$.

容易证明：在任意空间(E,ρ)中，E，$\varnothing$，$\overline{B}(x_0,r)$与$S(x_0,r)$恒为闭集；任意集的闭包恒为闭集.

下面定理说明， 闭集与开集有着“对偶”的关系与性质.

定理 1.1.10 设M为距离空间(E,ρ)的子集，则

（1）M是闭集$\Leftrightarrow M$包含其一切聚点；

（2）M是闭集$\Leftrightarrow M^C := E \setminus M$是开集；

（3）E中任意多个闭集之交是闭集，有限多个闭集之并是闭集.

由于离散空间中任一集均为开集，从而由定理 1.1.10(2)知：离散空间中的任一子集既是开集又是闭集.

1.1.4 可分距离空间

熟知，有理数集在实数集中稠密，即每个实数都可用有理数列任意逼近. 在数学分析中已证明了：$[a,b]$上的任一连续函数可用代数多项式任意一致逼近，又因实系数多项式可用有理系数的多项式一致逼近，因此$(C[a,b],\rho_\infty)$中的任意元f都可用有理系数的多项式一致逼近. 虽然以上两个问题针对不同的对象，但其实质是用某个可数集中的元素任意逼近另外一些元素. 将这两个问题抽象出来，我们引入

定义 1.1.11 若距离空间(E,ρ)中的两个子集M与D满足：$\overline{D} \supset M$，则称D在M中稠密. 如果D在全空间E中稠密，则称D是(E,ρ)中的稠密集. 如果(E,ρ)有可数的稠密集，则称(E,ρ)是可分的.

例 11 （i）离散空间(E,ρ)可分$\Leftrightarrow E$是可数集；

（ii）$(C[a,b],\rho_\infty)$是可分的；

（iii）$(\mathbf{R}^n,\rho_p)$可分，因为可数集$\mathbf{Q}^n$是稠密集；

（iv）$(\mathbf{C}^n,\rho_p)$可分，因为可数集:

$$\{(r_1,r_2,\cdots r_n) \mid \operatorname{Re} r_k, \operatorname{Im} r_k \in \mathbf{Q}(k=1,2,\cdots,n)\}$$

是稠密集；

（v）$(S(\mathbf{R}),\rho)$可分，因为可数集

$$D=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots) \mid r_i \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}\}$$

是稠密集.

1.1.5 连续映射

有了距离与收敛的概念，应用类似于数学分析中的方法，我们就可以建立连续映射的概念并讨论有关性质.

定义 1.1.12 设T是从距离空间(E_1,ρ_1)到(E_2,ρ_2)的映射，点$x_0\in E_1$. 如果$\forall x_n\in E_1\ (n=1,2,\cdots)$有

$$x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0(n\to\infty) \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{\rho_2} Tx_0(n\to\infty),$$

则称映射T在x_0处连续. 若T在E_1的每一点都连续，则称T为连续映射.

例 12 （i）设(E,ρ)为距离空间，则对任何固定的$a\in E$，$\rho(a,\cdot):E\to\mathbf{R}$是连续映射$(\mathbf{R}=(\mathbf{R},\rho_1))$.

（ii）设(E_1,ρ_1)与(E_2,ρ_2)是两个距离空间，定义

$$(\rho_1\times\rho_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2),$$

则$\rho_1\times\rho_2$是$E_1\times E_2$上的一个距离. 因此,$(E_1\times E_2,\rho_1\times\rho_2)$是一个距离空间,称为$(E_1,\rho_1)$与$(E_2,\rho_2)$的乘积空间.

（iii）对任一距离空间(E,ρ)，距离函数$\rho:E\times E\to\mathbf{R}$自动连续，其中$E\times E$赋以乘积距离$\rho\times\rho$.

证明 （i）设$x_n,x_0\in E$且$x_n\to x_0(n\to\infty)$，则

$$\begin{aligned}\rho(a,x_n)-\rho(a,x_0)&\le\rho(a,x_0)+\rho(x_0,x_n)-\rho(a,x_0)\\&=\rho(x_n,x_0).\end{aligned}$$

交换x_n与x_0的位置可得

$$\rho(a,x_0)-\rho(a,x_n)\le\rho(x_n,x_0),$$

从而

$$|\rho(a,x_n)-\rho(a,x_0)|\le\rho(x_n,x_0)(n=1,2,\cdots).$$

因此,

$$\rho(a,x_n)\to\rho(a,x_0)(n\to\infty).$$

可见，$\rho(a,\cdot):E\to\mathbf{R}$连续.

（ii）显然

$$\rho_1\times\rho_2:(E_1\times E_2)\times(E_1\times E_2)\to\mathbf{R}$$

满足距离公理的(M_1)与(M_2)，下证它满足(M_3).

$\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)\in E_1\times E_2$，我们有

$(\rho_1\times\rho_2)((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$

$$
\begin{aligned}
&\le \rho_1(x_1,z_1)+\rho_1(z_1,y_1)+\rho_2(x_2,z_2)+\rho_2(z_2,y_2)\\
&=[\rho_1(x_1,z_1)+\rho_2(x_2,z_2)]+[\rho_1(z_1,y_1)+\rho_2(z_2,y_2)]\\
&=(\rho_1\times\rho_2)((x_1,x_2),(z_1,z_2))+(\rho_1\times\rho_2)((z_1,z_2),(y_1,y_2)).
\end{aligned}
$$

可见,$\rho_1\times\rho_2$ 为 $E_1\times E_2$ 上的一个距离.

（iii）设 $(x_n,y_n),(x_0,y_0)\in E_1\times E_2$,且

$$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)\ (n\to\infty).$$

则当 $n\to\infty$ 时，有

$$(\rho\times\rho)((x_n,y_n),(x_0,y_0))=\rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,x_0)\to 0.$$

可见，$x_n\to x_0, y_n\to y_0(n\to\infty)$. 这说明：在 $E_1\times E_2$ 中的距离收敛等价于按坐标收敛. 由于

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_0,y_0)|\le \rho(x_n,x_0)+\rho(y_n,y_0),$$

从而 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x_0,y_0)(n\to\infty)$. 故 $\rho:E\times E\to\mathbf{R}$ 连续.

注 例 12 中的（i）说明距离函数分别连续（即固定一个变量关于另一变量连续),（ii）说明距离函数自动连续（即无需别的附加条件就连续).

以上我们用序列的形式给出了映射的连续性定义. 类似于数学分析中的方法，可用“$\varepsilon-\delta$”方法描述如下：

定理 1.1.13 映射 $T:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$ 在点 $x_0\in E_1$ 连续当且仅当对任意的 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得

$$\rho_1(x,x_0)<\delta\Rightarrow\rho_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon.$$

证明 ($\Rightarrow$) 设 $T:E_1\to E_2$ 在 $x_0\in E_1$ 连续，则以上蕴含关系成立. 否则，$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall n\in N$，$\exists x_n\in E_1$ 使得

$$\rho_1(x_n,x_0)<\frac{1}{n},\ 但\ \rho_2(Tx_n,Tx_0)\ge\varepsilon_0.$$

显然 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 但 Tx_n 不收敛于 $Tx_0(n\to\infty)$. 这与 T 在 x_0 处连续矛盾.

($\Leftarrow$) 设 $x_n\in E_1\ (n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $\rho_1(x_n,x_0)<\delta$，从而 $\rho_2(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$. 这说明

$$\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0.$$

故 T 在 x_0 处连续.

设 $T:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$ 是任一映射，对 $A\subset E_1$ 与 $B\subset E_2$，记

$$T(A)=\{Tx\mid x\in A\}\ （即 A 在 T 下的像),$$

$$T^{-1}(B)=\{x\in E_1\mid Tx\in B\}\ （即 B 在 T 下的原像).$$

由等式

$$T^{-1}(B)=\{x\in E_1 \mid Tx\notin B^c\}$$
$$=\{x\in E_1 \mid x\notin T^{-1}(B^c)\}$$
$$=\left[T^{-1}(B^c)\right]^c,$$

及开集与闭集的关系知：在映射T下，开集的逆像是开集当且仅当闭集的逆像是闭集．证毕．

设T是连续映射，B为(E_2,ρ_2)中的任一开集，下面讨论$T^{-1}(B)$．任取$x_0\in T^{-1}(B)$，则$Tx_0\in B$．由于B是开集，从而存在$\varepsilon>0$，使得$B(Tx_0,\varepsilon)\subset B$．对此$\varepsilon$，根据$T$在$x_0$处的连续性及定理 1.1.13 知，存在$\delta>0$使当$\rho_1(x,x_0)<\delta$时，有$\rho_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$．可见$T(B(x_0,\delta))\subset B(Tx_0,\varepsilon)$，因此$B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon))\subset T^{-1}(B)$．这说明$x_0$为$T^{-1}(B)$的内点．由于$x_0$任意性，可知$T^{-1}(B)$是$(E_1,\rho_1)$中的开集．反之，如果在$T$下任意开集的逆像为开集，那么$\forall\varepsilon>0$，$T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon))$是$(E_1,\rho_1)$中的开集，其中$x_0\in E_1$．从而存在$B(x_0,\delta)\subset T^{-1}(B(Tx_0,\varepsilon))$．可见

$$\rho_1(x,x_0)<\delta\Rightarrow\rho_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon,$$

故知T为连续映射．

由以上推导可得：

定理 1.1.14　映射$T:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$连续$\Leftrightarrow$任意开集在$T$下的逆像是开集$\Leftrightarrow$任意闭集在$T$下的逆像是闭集．

1.1.6　列紧空间

实数域$\mathbf{R}$除了完备性以外，还有一个重要特性，就是 Weierstrass 定理，任何有界无穷点列必有收敛子列．这一命题在一般距离空间中是否仍然成立呢？请看下面的例子．

例 13　在$C[0,1]$中令$A=\{f_n \mid n\in\mathbf{N}\}$，其中

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx, & 0\le x<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}\le x\le 1,\end{cases}$$

则$\rho_\infty(f_n,0)=1(n=1,2,\cdots)$且$\{f_n\}$没有收敛的子列．否则，若存在$\{f_{n_k}\}$收敛于某$f\in C[0,1]$，则

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

这与 f 在 $[0,1]$ 上连续矛盾．这说明：包含在闭球

$$\overline{B}(0,1)=\{f\in C[0,1]:\rho_\infty(f,0)\le 1\}$$

之中的点列 $\{f_n\}$ 没有以距离 ρ_∞ 收敛的子列．可见,以上的 Weierstrass 定理在一般距离空间中未必成立．为此，引入以下概念.

定义 1.1.15 设 A 是距离空间 (E,ρ) 中的点集，则

（i）当存在 $\overline{B}(x_0,r)\supset A$ 时，称 A 是有界集;

（ii）当 A 中的任一无穷点列都有收敛子列时，称 A 是列紧集;

（iii）当 A 是列紧闭集时，称 A 是紧集;

（iv）当 E 本身是列紧集时，称它是列紧空间.

由于有限集中没有无穷点列，从而任一空间 (E,ρ) 中的有限集必是列紧集，因而是紧集（因有限集没有聚点，从而为闭集）．由于离散空间 (E,ρ) 中的收敛点列只能是常点列，从而可知：离散空间 (E,ρ) 是列紧空间当且仅当 E 是有限集．根据数学分析中的 Weierstrass 聚点定理可知：$\mathbf{R}^n$ 中的有界点集必是列紧集.

下面讨论列紧集的一些性质.

设 $A\subset(E,\rho)$ 是列紧集，则易见 A 的任意子集 B 必列紧，即列紧性是遗传的．从而 A 的内部 A° 也是列紧集．那么 A 的闭包 $\overline{A}$ 是否列紧呢？为此，设 $\{x_n\}$ 是 $\overline{A}$ 中的无穷点列，则 $B\left(x_n,\dfrac{1}{n}\right)\bigcap A\ne\varnothing$．从而存在 $y_n\in A$ 使得

$$\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots).$$

由于 A 列紧，则存在子列 $y_{n_k}\to y_0\in E\ (k\to\infty)$．由不等式

$$0\le\rho(x_{n_k},y_0)\le\rho(x_{n_k},y_{n_k})+\rho(y_{n_k},y_0)<\frac{1}{n_k}+\rho(y_{n_k},y_0)$$

知 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 y_0．可见，$\overline{A}$ 是列紧集．由前面可知，离散空间 (E,ρ) 是完备的但一般不是列紧的除非 E 是有限集．这说明完备性不蕴含列紧性．反之如何？

设 (E,ρ) 是列紧空间，$\{x_n\}$ 为其中的基本列．由列紧性知，$\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$．记 $x_0=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$．于是 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得当 $k>N$ 时，

$$\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon,$$

且当 $m,n>N$ 时，有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$．固定 $n>N$，取 $k>N$ 使得 $n_k>n$，则

$\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$ 且 $\rho(x_n,x_{n_k})<\varepsilon$．因此，

$$\rho(x_n,x_0)\le\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0)<2\varepsilon .$$

可见 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$．这说明 (E,ρ) 是完备的．总结以上讨论，可得下面定理．

定理 1.1.16　(i) 若 $A\subset(E,\rho)$ 列紧，则 A°，$\overline{A}$ 及 A 的任意子集是列紧集．

(ii) 若 $A_\alpha\subset(E,\rho)\ (\alpha\in I)$ 且至少一个列紧，则 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 也列紧．

(iii) 若 (E,ρ) 是列紧空间，则它必完备．

下面给出完备空间中列紧集的一个刻画．

定义 1.1.17　设 A，B 是距离空间 (E,ρ) 中的点集，如果对任意 $\varepsilon>0$ 及 $x\in A$，存在 $y\in B$ 使得 $x\in B(y,\varepsilon)$，则称 B 是 A 的 ε-网；又若 B 是列紧集或有限集，则称 B 是 A 的列紧 ε-网（或有限 ε-网）．

显然，B 是 A 的 ε-网 $\Leftrightarrow A\subset\bigcup\limits_{y\in B}B(y,\varepsilon)$．

定理 1.1.18　设 A 是完备距离空间 (E,ρ) 中的点集，则 A 列紧当且仅当 $\forall\varepsilon>0$，A 都存在一个有限 ε-网．

证明　$(\Rightarrow)$ 设 A 列紧但对某个 $\varepsilon_0>0$，A 没有有限的 ε-网．这时 $A\ne\varnothing$，任取 $x_1\in A$．由于 $B=\{x_1\}$ 不是 A 的有限 ε-网，从而存在 $x_2\in A$ 使得 $\rho(x_2,x_1)\ge\varepsilon_0$．又因 $B=\{x_1,x_2\}$ 不是 A 的有限 ε-网，从而有 $x_3\in A$ 使得 $\rho(x_3,x_i)\ge\varepsilon_0,(i=1,2)$．如此继续，可得到 A 中的点列 $\{x_n\}$，满足：当 $m\ne n$ 时，$\rho(x_m,x_n)\ge\varepsilon_0$，于是 $\{x_n\}$ 没有收敛子列，故 A 不是列紧集，矛盾．

$(\Leftarrow)$ 此时，对 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，$A$ 都存在有限 ε_n-网．设

$$B=\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$$

是 A 的一个无穷点列．由于 A 有有限的 ε_1-网，从而 A 可被有限个半径为 ε_1 的开球覆盖．由 B 是无穷集可知，必存在开球 S_1，使得 $S_1\cap B$ 为无穷集．记 $B_1=B\cap S_1$．又因 B_1 是无穷集且 A 有有限的 ε_2-网，从而同理可知：存在某个以 ε_2 为半径含 B_1 中的无穷个点的开球 S_2，即 $B_2=B_1\cap S_2$ 为无穷集．如此继续，可以得到一列无穷集 $\{B_n\}$ 与一列开球 $\{S_n\}$ 满足：

$$S_n\supset B_n\supset B_{n+1},\quad B_n=B_{n-1}\cap S_n,$$

其中 S_n 的半径为 $\varepsilon_n(n=1,2,\cdots)$．任取

$$y_1\in B_1,y_2\in B_2\setminus\{y_1\},\cdots,y_n\in B_n\setminus\{y_1,\cdots,y_{n-1}\},\cdots.$$

于是,得到B的一个子列$\{y_n\}$．当$m>n$时，有

$$y_m, y_n \in B_n \subset S_n,$$

从而$\rho(y_m, y_n)<2\varepsilon_n$．由于$\varepsilon_n \to 0(n\to\infty)$，从而可知$\{y_n\}$为完备空间$E$中的基本列，因此收敛．故$A$列紧．证毕．

注 以上对必要性的证明中没有用到E的完备性．

推论 1 若(E,ρ)完备，则$A\subset E$列紧的充要条件是$\forall\varepsilon>0$，A有列紧ε-网．

证明 $(\Rightarrow)$这时A是A的列紧ε-网．

$(\Leftarrow)$若A有列紧ε-网B，则B有有限ε-网

$$C=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$

即$B\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon)$．因为$\forall x\in A$，存在$y\in B$，使得$x\in B(y,\varepsilon)$，从而存在$x_i$使得$x\in B(y,\varepsilon)\subset B(x_i,2\varepsilon)$．于是,$C$就是$A$的有限$2\varepsilon$-网，故$A$列紧．证毕．

应该注意，定理 1.1.18 与推论 1 中并未要求A的有限（或列紧）ε-网B含在A中．但作为推论，有

推论 2 若(E,ρ)完备，则$A\subset E$列紧$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在$A$的有限子集$B$，使$A\subset\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon)$，即$A$含有有限的$\varepsilon$-网$B$．

证明 $(\Leftarrow)$由定理 1.1.18 知．

$(\Rightarrow)$由定理 1.1.18 知：$\forall\varepsilon>0$，A有有限的$\varepsilon/2$-网$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset E$，即

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

不妨设$A\bigcap B\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)$非空$(i=1,2,\cdots,n)$，否则去掉那些“无用的”$x_i$，仍得$A$的有限$\frac{\varepsilon}{2}$－网．这样，任取

$$\bar{x}_i\in A\bigcap B\left(x_i,\frac{\varepsilon}{2}\right)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n\}\subset A$是$A$的有限$\varepsilon$-网．

类似于推论 2 可证: 完备空间(E,ρ)中的点集A列紧当且仅当A含有列紧的ε-网．

定理 1.1.18 与推论 1, 推论 2 都是检验完备空间中列紧性的重要工具，例如

由它们可得

推论 3　集 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充要条件是：

(i) 集 A 有界；

(ii) 集 A 是等度连续的，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in A$ 及任何 t'，$t''\in[a,b]$，只要 $|t'-t''|<\delta$，就有

$$|x(t')-x(t'')|<\varepsilon .$$

1.1.7　压缩映射原理

在微分方程、积分方程以及其他各类方程的理论中，解的存在性、唯一性及近似解的收敛性等都是很重要的问题．许多问题的解答都归结为求某个映射的不动点．例如，求解 Cauchy 问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

可化为求解积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt .$$

若记 $(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt$，则以上积分方程有解当且仅当映射 T 有不动点．下面我们在一般框架中讨论这个问题．

设 T 是从距离空间 (E,ρ) 到自身的映射．如果映射 T 不扩大 E 中任意两点的距离，则 T 可能有不动点．于是，我们进一步假设 T 是压缩映射，即存在 $0\le\theta<1$ 使得：$\forall x,y\in E$ 有

$$\rho(Tx,Ty)\le\theta\rho(x,y) .$$

现任取 $x_0\in E$，令

$$x_1=Tx_0,x_2=Tx_1,\cdots,x_{n+1}=Tx_n(n=1,2,\cdots) .$$

只要证明 T 连续且点列 $\{x_n\}$ 收敛于某个 $\bar{x}$，则 $\bar{x}=T\bar{x}$，可见 $\bar{x}$ 为 T 的不动点．由于 T 是压缩映射，则易见 T 连续．因此,只要证明 $\{x_n\}$ 收敛．于是，如还假设空间 (E,ρ) 完备，则只要证明 $\{x_n\}$ 为基本列便可．这时，我们有

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1,x_0)=\rho(Tx_0,x_0),\\
&\rho(x_2,x_1)=\rho(Tx_1,Tx_0)\le\theta\rho(x_1,x_0)=\theta\rho(Tx_0,x_0),\\
&\rho(x_3,x_2)=\rho(Tx_2,Tx_1)\le\theta\rho(x_2,x_1)\le\theta^2\rho(Tx_0,x_0),\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\rho(x_{n+1},x_n)\le\theta^n\rho(Tx_0,x_0)(n=1,2,\cdots) .
\end{aligned}$$

因此，$\forall n,p\in\mathbf{N}$ 有

$$\rho(x_{n+p},x_n)\le\rho(x_{n+p},x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p-2})$$
$$+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)$$
$$\le(\theta^{n+p-1}+\theta^{n+p-2}+\cdots+\theta^n)\rho(Tx_0,x_0)$$
$$\le\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(Tx_0,x_0).$$

由于 $0\le\theta<1$，可见 $\{x_n\}$ 为 (E,ρ) 中的基本列．因而,存在 $\bar{x}\in E$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$．于是

$$T\bar{x}=T(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}Tx_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\bar{x}.$$

故 $\bar{x}$ 为 T 的不动点．此外，如果 T 还有一个不动点 $\bar{y}\in E$，则

$$\rho(\bar{x},\bar{y})=\rho(T\bar{x},T\bar{y})\le\theta\rho(\bar{x},\bar{y}).$$

由于 $0\le\theta<1$，故有 $\rho(\bar{x},\bar{y})=0$，即 $\bar{x}=\bar{y}$．可见，这时 T 有且只有一个不动点．总结以上讨论，我们有

定理 1.1.19 设 T 是从完备距离空间 (E,ρ) 到自身的压缩映射，即存在 $0\le\theta<1$，使得 $\forall x,y\in E$ 有

$$\rho(Tx,Ty)\le\theta\rho(x,y),$$

则 T 有唯一的不动点，即存在唯一的 $\bar{x}\in E$ 使 $T\bar{x}=\bar{x}$．

这个定理常称为压缩映射原理，它有很广泛的应用．

例 14 常微分方程解的存在性与唯一性，考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y|_{x_0}=y_0, \tag{1.1.1}$$

其中 f 在闭区域

$$D=\{(x,y)\,|\,x_0-r\le x\le x_0+r,-\infty<y<\infty\}$$

上连续且关于 y 满足李普希兹条件,即存在 $k\ge0$ 使得

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le k|y'-y''|,\quad\forall(x,y'),(x,y'')\in D, \tag{1.1.2}$$

则存在常数 $\delta>0$ 使得方程（1.1.1）有且只有一个解 $y\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$．

其实，微分方程（1.1.1）等价于积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y)dt. \tag{1.1.3}$$

取 $r>\delta>0$，使得 $0<k\delta<1$．定义

$$T:C[x_0-\delta,x_0+\delta]\to C[x_0-\delta,x_0+\delta]$$

如下：

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt,$$

则$\forall y_1, y_2 \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$有

$$\rho_\infty(Ty_1, Ty_2) = \max_{|x-x_0|\le\delta} \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1) - f(t, y_2)]dt \right|$$

$$\le \max_{|x-x_0|\le\delta} \left| \int_{x_0}^{x} k \cdot | y_1(t) - y_2(t) | dt \right|$$

$$\le k\delta \cdot \rho_\infty(y_1, y_2).$$

由于$0 < k\delta < 1$，从而T是完备空间$C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$上的压缩映射，根据定理1.1.17知$T$有唯一的不动点$\overline{y}$．因此,方程（1.1.1）有且只有一个解$\overline{y}$．

例 15 积分方程解的存在性与唯一性. 考察积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds, \tag{1.1.4}$$

其中λ是参数，f在$[a,b]$上可测，K在$D = [a,b]\times[a,b]$上可测且

$$\int_a^b f^2(t)dt < \infty, \quad \alpha = \iint_D | K(s,t) |^2 \, dsdt < \infty .$$

则对$|\lambda|$充分小的λ，积分方程（1.1.4）有唯一解x满足

$$\int_a^b | x(t) |^2 \, dt < \infty .$$

事实上，令

$$L^2[a,b] = \{ f \mid f \text{ 在}[a,b]\text{上可测且} \int_a^b | f(x) |^2 \, dx < \infty \}.$$

对任意$f, g \in L^2[a,b]$定义

$$\rho_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b | f - g |^2 (t)dt},$$

且规定:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), a.e. x \in [a,b].$$

容易验证: $(L^2[a,b], \rho_2)$是完备距离空间. 定义

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds .$$

可以证明:T是$L^2[a,b]$到$L^2[a,b]$的映射.

由于$\forall x, y \in L^2[a,b]$,有

$$\rho_2(Tx,Ty)=|\lambda|\left(\int_a^b\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))ds\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq|\lambda|\left(\int_a^b\left(\int_a^b|K(t,s)|^2 ds\int_a^b|x(s)-y(s)|^2 ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\left(\int_a^b dt\int_a^b|K(t,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|x(s)-y(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\lambda|\alpha\cdot\rho_2(x,y).$$

因此，只要$|\lambda|\alpha<1$，由定理 1.1.19 知：映射T有唯一的不动点$x\in L^2[a,b]$. 这个x就是方程（1.1.4）满足要求的唯一的解.

习题 1.1

1．应用赫尔得（Hölder）不等式

$$\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leq\left\{\sum_{i=1}^n|a_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^n|b_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

其中a_i,b_i为任意数，$p,q>1$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,推出 Minkowski 不等式:

$$\left\{\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leq\left\{\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

其中x_i,y_i为任意数，$p\geq1$，进而证明: $\mathbf{R}^n$以按照距离

$$\rho_p(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

构成完备、可分的距离空间.

2．设$l^p(\mathbf{K})$是满足条件$\left\{\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$的一切$\mathbf{K}$数列

$$x=(x_i)=(x_1,x_2,\cdots)$$

之集．应用习题 1 中的不等式证明：$l^p(\mathbf{K})$是$\mathbf{K}$上的线性空间且关于

$$\rho_p(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

成为完备、可分的距离空间，其中$1\le p<\infty$，$\mathbf{K}=\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$.

3. 设(E,ρ)是距离空间，$A\subset E$非空，定义

$$f(x)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in A\},\quad x\in E.$$

证明:$f:(E,\rho)\to\mathbf{R}$连续，且$f(x)=0\Leftrightarrow x\in\overline{A}$. 我们称$f(x)$为点$x$到集$A$之距离，并记为$f(x)=\rho(x,A)$.

4. 证明：在距离空间(E,ρ)中，闭集是可数个开集之交；开集为可数个闭集之并.

5. 设(E,ρ)是距离空间，F_1与F_2是E中非空不相交的闭集，证明存在E上的连续函数f使得：

$$f(F_1)=\{0\},\quad f(F_2)=\{1\}.$$

提示：$f(x)=\dfrac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$.

6. 设F_1,F_2是距离空间(E,ρ)中的不交闭集. 试证存在E中的不交开集G_1与G_2使得$G_i\supset F_i(i=1,2)$.

提示：考虑$G_1=\{x\in E\mid \rho(x,F_1)-\rho(x,F_2)>0\}$等.

7. 设$T:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$是连续映射，$A\subset E_1$. 证明

（i）若A是E_1的稠子集，则$T(A)$是E_2的稠子集.

（ii）若E_1可分，则E_2也可分.

（iii）若A是紧子集（列紧闭集），则$T(A)$是E_2的紧子集.

8. 若(E,ρ)为距离空间，$A\subset E$非空. 证明空间(A,ρ)完备当且仅当A是E的闭子集.

9. 在距离空间中证明：（i）基本列必有界；（ii）列紧集是有界集；（iii）紧集的闭子集是紧集.

10. 设(E,ρ)是列紧空间（从而紧），$f:E\to\mathbf{R}$连续，则

（i）f在E上一致连续，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$使得对任意$x_1,x_2\in E$，当$\rho(x_1,x_2)<\delta$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$；

（ii）f在E上有界，即存在$K>0$使得

$$|f(x)|\le K\ (\forall x\in E);$$

（iii）f在E上取得最大、最小值.

提示：这f的值域$f(E)$是$\mathbf{R}$的紧子集，从而是有界闭集.

11. 设F_1,F_2是完备空间(E,ρ)中的非空紧子集，证明:必存在一点$(x_0,y_0)\in F_1\times F_2$使得

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(F_1, F_2),$$

其中 $\rho(F_1, F_2) = \inf\{\rho(x, F_2) \mid x \in F_1\}$ 是 F_1 与 F_2 之间的距离.

12.（隐函数存在定理）设函数 $f(x,y)$ 在 $G=[a,b]\times\mathbf{R}$ 上连续且 $f_y(x,y)$ 存在，试证：如果存在常数 m 与 M 使得对任意 $(x,y)\in G$ 有 $0<m<f_y(x,y)<M$，则方程 $f(x,y)=0$ 确定 $[a,b]$ 上唯一连续的隐函数 $y=\varphi(x)$，即存在唯一 $\varphi\in C[a,b]$，对任意 $x\in[a,b]$，有 $f(x,\varphi(x))\equiv 0$.

提示：考虑映射 $(T\varphi)(x)=\varphi(x)-\dfrac{1}{M}f(x,\varphi(x))$，应用压缩映射原理.

13.（闭球套定理）设 E 是完备距离空间，$\{x_n\}$ 为 E 中的点列，记

$$F_n = \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) = \{x \in E \mid \rho(x, x_n) \le \varepsilon_n\} (n = 1,2,\cdots).$$

证明：如果 $\{F_n\}$ 满足：

（i）$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$；

（ii）$\varepsilon_n \to 0 (n\to\infty)$，

则存在唯一 $x_0\in E$ 使得 $x_0\in F_n (n=1,2,\cdots)$.

提示：证明 $\{x_n\}$ 为 E 中的基本列，记 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

14. 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空开集，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 中一列非空的有界闭集 $\{K_i\}$ 使得

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \text{ 且 } K_i \subset (K_{i+1})^{\circ} \ (i = 1,2,\cdots).$$

15. 设 G 与 $\{K_i\}$ 如习题 14，并记

$$C(G) = \{f \mid f: G \to R\text{连续}\}, \rho_n(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in K_n\}.$$

对 $f,g\in C(G)$，定义

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)},$$

证明:

（i）ρ 是 $C(G)$ 上的距离；

（ii）$\{f_n\}$ 是 $C(G)$ 中的 Cauchy 列；$\forall i\in\mathbf{N}, \{|f_n|_{K_i}\}$ 是 $(C(K_i),\rho_i)$ 中的 Cauchy 列，$f_n|_{K_i}$ 是 f_n 在 K_i 上的限制；

（iii）$\forall f_n, f\in C(G)\ (n=1,2,\cdots), f_n \xrightarrow{\rho} f \Leftrightarrow \forall K_i$，$\{f_n(x)\}$ 在 K_i 上一致收敛于 $f(x)$；

（iv）$(C(G),\rho)$是完备距离空间.

§1.2 赋范线性空间

1.2.1 定义与例子

为了描述“任意逼近”的概念，我们引入了“距离”的概念. 由此定义了收敛性、映射的连续性等. 从而精确地描述了“x_n 可以任意逼近 x”，即 x_n 与 x 的距离 $\rho(x_n,x)$ 趋于零. 在前言中已经指出，为了确切、全面的描述状态空间的性质，还必须引入代数运算. 最简单的运算是加法与数乘即线性运算，这相当于在线性空间中引入距离的概念. 为了使得距离与代数运算很好的联系起来，应该要求在线性空间V (实数域$\mathbf{R}$ 或复数域$\mathbf{C}$ 上)中的距离 ρ 具有以下基本属性：

(1) 平移不变性：

$$\forall x,y,z\in V,\rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)\text{；}$$

(2) 齐次性：

$$\forall x\in V,\lambda\in\mathbf{R},\rho(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\rho(x,y)\text{；}$$

(3) 和的连续性：

$$\rho(x_n,x)\to 0,\rho(y_n,y)\to 0\Rightarrow\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0\text{；}$$

(4) 数乘连续性：

$$\rho(x_n,x)\to 0,|\lambda_n-\lambda|\to 0\Rightarrow\rho(\lambda_n x_n,\lambda x)\to 0\text{.}$$

容易证明：性质(1)与(2)$\Rightarrow$性质(3)与(4). 因此，只要 ρ 满足(1)与(2)即可.

设线性空间V 上的距离满足以上条件，记$\|x\|=\rho(x,0)$ $(x\in V)$，则函数 $\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$ 满足以下条件：$\forall\lambda\in\mathbf{R},\forall x,y\in V$,有

1° $\|x\|\geq 0,\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ （V 中的零元）;

2° $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$；

3° $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$，

这说明：在线性空间V 中有满足条件（1）与（2）的距离，必有满足条件1°—3°的函数$\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$. 反之，若有满足条件1°—3°的函数$\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$，定义$\rho(x,y)=\|x-y\|$，则 ρ 是V 上满足条件(1)与(2)的距离. 因此，为了在V 上引入满足条件(1)与(2)的距离 ρ，只需引入满足条件1°—3°的函数$\|\cdot\|$. 由此我们引入以下概念.

以后均用$\mathbf{K}$ 表示实数域$\mathbf{R}$ 或复数域$\mathbf{C}$，当讨论线性空间时，均指数为实数域或复数域的情况.

定义 1.2.1 设V 是数域$\mathbf{K}$ 上的线性空间，如果函数$\|\cdot\|:V\to\mathbf{R}$ 满足条件：

$\forall x, y \in V$ 与 $\lambda \in \mathbf{K}$，

(N_1) $\|x\| \geq 0$；$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$；

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$；

(N_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$，

则称 $\|\cdot\|$ 是线性空间 V 上的范数，称 $\|x\|$ 为向量 x 的范数，此时称序对 $(V, \|\cdot\|)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间，简称 V 是赋范空间.

如前所述，当 $(V, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间时，定义 $\rho(x,y) = \|x-y\|$，则 ρ 是 V 上的距离且满足条件(1)至(4). 既然 V 是距离空间，因此就可在 V 中引入收敛性、连续性、有界性、可分性、开集与闭集等概念. 例如，对于 $x_n, x \in V$，当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to x$ 指 $\|x_n - x\| \to 0$，这时，称点列 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x 或称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x. 映射 $T:(V_1, \|\cdot\|_1) \to (V_2, \|\cdot\|_2)$ 连续是指：

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow \|Tx_n - Tx\|_2 \to 0 (n \to \infty).$$

应用范数公理 (N_2) 与 (N_3)，可以证明以下定理.

定理 1.2.2 设 $(V, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则

(i) 范数是连续的，即

$$x_n \to x (n \to \infty) \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\| (n \to \infty);$$

(ii) 加法是连续的，即

$$x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty) \Rightarrow x_n + y_n \to x + y (n \to \infty);$$

(iii) 数乘是连续的，即

$$x_n \to x, \lambda_n \to \lambda (n \to \infty) \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x (n \to \infty).$$

其中 $x_n, x, y_n, y \in V$，$\lambda_n, \lambda \in \mathbf{K} (n = 1, 2, \cdots)$.

证明 由于

$$\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|，\quad \|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|，$$

所以

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

由此可知(i)成立. 又因

$$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

从而(ii)成立. 最后，由不等式

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &\leq \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\| \\ &\leq (|\lambda_n - \lambda| + |\lambda|)\|x_n - x\| + \|x\| \cdot |\lambda_n - \lambda|\end{aligned}$$

知(iii)成立.

这个定理表明：在赋范线性空间中，范数与线性运算是自动连续的.

如果赋范空间$(V,\|\cdot\|)$作为距离空间（即赋距离$\rho(x,y)=\|x-y\|$）是完备的，则称它为 Banach 空间.

下面介绍几个古典的 Banach 空间.

例 1　空间$\mathbf{R}^n$. 对

$$x=(x_1,x_2,\cdots x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$$

定义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\ \forall\alpha\in\mathbf{R},$$

则$\mathbf{R}^n$成为$\mathbf{R}$上的线性空间. 又若定义

$$\|x\|_p=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}},\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,$$

其中$1\le p<\infty$，则$(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_p)$成为$\mathbf{R}$上的 Banach 空间.

类似地，可在$\mathbf{C}^n=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\,|\,\lambda_i\in\mathbf{C}\}$中定义线性运算与范数$\|\cdot\|_p$使其成为$\mathbf{C}$上的 Banach 空间. 易见，在$\mathbf{R}^n$或$\mathbf{C}^n$中的强收敛等价于按坐标收敛.

例 2　空间$l^p(\mathbf{K})$. 对

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p(\mathbf{K}),$$
$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^p(\mathbf{K}),$$

定义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n\cdots),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n,\cdots),\ \forall\alpha\in\mathbf{K},$$
$$\|x\|_p=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty.$$

则$(l^p(\mathbf{K}),\|\cdot\|_p)$成为$\mathbf{K}$上的 Banach 空间.

例3　空间$l^\infty(\mathbf{K})$. 对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty(\mathbf{K})$与

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)\in l^\infty(\mathbf{K}),$$

定义加法与乘数如例 2，且定义

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|:n=1,2,\cdots\},$$

则$(S(\mathbf{K}),\|\cdot\|)$成为$\mathbf{K}$上的 Banach 空间.

例 4　空间$C[a,b]$. 对$x,y\in C[a,b]$及$\alpha\in\mathbf{R}$定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),\ (\alpha x)(t)=\alpha x(t),\ \|x\|_\infty=\max_{a\le t\le b}|x(t)|,$$

则$(C[a,b],\|\cdot\|_\infty)$成为$\mathbf{R}$上的 Banach 空间．如果定义

$$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|dt,$$

则$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$成为$\mathbf{R}$上的赋范线性空间，但不是 Banach 空间．

例 5 空间$L^p[a,b]$．对于 $1\le p<\infty$，记

$$L^p[a,b]=\{f \mid f\text{ 在}[a,b]\text{上可测且}\int_a^b|f(x)|^p dx<+\infty\}.$$

容易证明：关于函数的加法与数乘（如例 4），且视

$$f=0\Leftrightarrow f(x)=0,\ a.e.\text{于}[a,b],$$

$L^p[a,b]$成为$\mathbf{R}$上的线性空间．对于$f\in L^p[a,b]$，定义

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\ (\text{Lebesgue 积分}),$$

则$(L^p[a,b],\|\cdot\|_p)$成为$\mathbf{R}$上的赋范线性空间且可分完备，从而是 Banach 空间．其证明留作练习．

例 6 空间$L^\infty[a,b]$．记

$$L^\infty[a,b]=\{f \mid f:[a,b]\to\mathbf{R}\text{ 可测且}\|f\|_\infty<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_\infty=\inf\{\sup_{t\in[a,b]-E_0}|f(t)|: E_0\subset[a,b]\text{且}mE_0=0\}$$

是f在$[a,b]$上的本性上确界，函数的加法与数乘(如例 4)且规定：

$$f=0\Leftrightarrow f(x)=0,\ a.e.\text{于}[a,b],$$

则$(L^\infty[a,b],\|\cdot\|_\infty)$成为 Banach 空间．其证明留作练习．

例 7 空间$C^{(k)}[a,b]$．记

$$C^{(k)}[a,b]=\{f \mid f:[a,b]\to\mathbf{R}\text{ 有连续的}k\text{阶导数}\},$$

在其中定义加法与数乘如例 4，且定义

$$\|f\|=\sum_{i=0}^k\|f^{(i)}\|_\infty,$$

其中$f^{(i)}$是f的i阶导函数，则由一致收敛的函数列之性质可以证明：$(C^{(k)}[a,b],\|\cdot\|_\infty)$是$\mathbf{R}$上的 Banach 空间．

以上的函数空间

$$C[a,b],\ C^{(k)}[a,b]\text{和}L^p[a,b](1\le p\le\infty)$$

均考虑实值函数 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$. 对复值函数也可引入类似的空间，得到复的 Banach 空间.

1.2.2　有限维赋范线性空间

设 $(V,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间．如果作为线性空间，V 是有限维的，则称 $(V,\|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间．否则称它是无限维的．前面的几个例子当中，除了 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 外都是无限维的．有限维空间具有由有限个线性无关向量构成的基底，讨论起来比较方便．在第一节中已经指出：$\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 中的有界闭集是紧集，且看到这一性质在无穷维空间不再成立（如 $C[0,1]$ 中）．下面我们将看到"有界闭集是紧集"这一性质完全刻画了空间的有限维性质．另外，还将证明任意 n 维赋范线性空间都与 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 同构与同胚.

设 $(V,\|\cdot\|)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维赋范线性空间，它有基底 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ ．在线性代数中已经知道：

$$\pi x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad \forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in V$$

定义线性同构 $\pi:V\to \mathbf{K}^n$ ，因此 V 与 $\mathbf{K}^n$ 线性同构．可见 V 与 $\mathbf{K}^n$ 中的代数运算规律完全相同，即

$$\pi(x+y)=\pi x+\pi y \text{ 与 } \pi(\alpha x)=\alpha\pi x$$

成立．那么收敛性是否一致呢？即下列命题是否成立：

$$\forall x_n,x\in V, x_n\to x\Leftrightarrow \pi x_n\to \pi x\quad (n\to\infty).$$

为了讨论这一问题，设 $x\in V$ ，则 x 可表为 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ ，其中 $\xi_i\in \mathbf{K}$ ．从而，由范数的性质知

$$\begin{aligned}\|x\|&=\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\|\le\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i e_i\|\\&=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\cdot\|e_i\|\le\left\{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=m\|\pi x\|_2,\end{aligned}$$

其中 $m=\left\{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ 与 x 无关且非零（因为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 非零）．这说明

$$\pi x_n\to\pi x\Rightarrow x_n\to x(n\to\infty).$$

反之，对任 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ 及 $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i\in V$，有

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|\le m\|\pi x-\pi y\|_2=m\left\{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

这说明:公式

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|x\|\left(\forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right)$$

定义连续函数 $f:S(0,1)\to\mathbf{R}$，其中 $S(0,1)$ 是 $(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 中的单位球面：$\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=1$．由于 $S(0,1)$ 是 $(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 中的紧子集（即有界闭集），从而 f 在 $S(0,1)$ 上取到最小值 m'，由于 f 为正值连续函数，从而 $m'>0$．因此，对任意 $x\in V$，记 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，则当 $x\ne 0$ 时，$\pi x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 也非零，因而

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\|\pi x\|_2\ne 0.$$

因此

$$f\left(\frac{1}{\|\pi x\|_2}\xi_1,\frac{1}{\|\pi x\|_2}\xi_2,\cdots,\frac{1}{\|\pi x\|_2}\xi_n\right)\ge m'$$

即 $\left\|\frac{1}{\|\pi x\|_2}x\right\|=\frac{1}{\|\pi x\|_2}\|x\|\ge m'$，可见 $\|x\|\ge m'\|\pi x\|_2$．易见，当 $x=0$ 时，这个不等式成立．故得

$$\frac{1}{m}\cdot\|x\|\le\|\pi x\|_2\le\frac{1}{m'}\cdot\|x\|,\quad\forall x\in V.$$

总结以上讨论，得到

定理 1.2.2 设 $(V,\|\cdot\|)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的 n 维赋范线性空间，则存在线性同构 $\pi:V\to\mathbf{K}^n$ 及常数 $M,M'>0$ 使得

$$M\cdot\|x\|\le\|\pi x\|_2\le M'\|x\|,\forall x\in V.$$

这时，有 $x_n\to x\Leftrightarrow\pi x_n\to\pi x(n\to\infty)$，从而 π 与逆映射 $\pi^{-1}:\mathbf{K}^n\to V$ 都连续．此时称 π 为同胚映射，且称 $(V,\|\cdot\|)$ 与 $(\mathbf{K}^n,\|\cdot\|_2)$ 同胚．

如果 V_1 是赋范线性空间 $(V,\|\cdot\|)$ 的 n 维子空间,则由定理 1.2.2 知 $(V_1,\|\cdot\|)$ 与

$(\mathbf{K}^n,\|\cdot\|_2)$ 线性同构且同胚．由于后者是完备的，从而 $(V_1,\|\cdot\|)$ 是完备的．根据习题 1.1.8 知 V_1 是 V 的闭子空间．由此可见：在赋范线性空间中，任意有限维子空间必是闭子空间．

为了给出有限维赋范线性空间的刻画，先介绍一个很重要的引理－F. Riesz 引理．

引理 1.2.3(F. Riesz) 设 V_0 是赋范线性空间 $(V,\|\cdot\|)$ 的真闭子空间，则 $\forall 0<\varepsilon<1, \exists x_0 \in V$ 使得

$$\| x_0 \|=1 \text{且} \| x_0 - x \| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in V_0 .$$

证明　任取 $x_1 \in V \setminus V_0$，记

$$d = \rho(x_1, V_0) = \inf_{x\in V_0} \| x - x_1 \|,$$

由习题 1.1.4 知: $d>0$（否则 $x_1 \in \overline{V_0} = V_0$ 矛盾）. 对任意 $0<\varepsilon<1$，有 $\dfrac{d}{\varepsilon} > d$. 从而,存在 $x_1' \in V_0$ 使得

$$0 < \| x_1 - x_1' \| < \frac{d}{\varepsilon}, \text{ 即 } \frac{d}{\| x_1 - x_1' \|} > \varepsilon .$$

令

$$x_0 = \frac{1}{\| x_1 - x_1' \|}(x_1 - x_1'),$$

则 $x_0 \in V$ 且 $\| x_0 \|=1$．任取 $x \in V_0$，有

$$\| x_1' - x_1 \| (x - x_1') \in V_0,$$

因此,

$$\begin{aligned}\| x - x_0 \| &= \frac{1}{\| x_1 - x_1' \|} \| \| x_1' - x_1 \| x + x_1' - x_1 \| \\ &\geq \frac{1}{\| x_1 - x_1' \|} d \\ &\geq \varepsilon .\end{aligned}$$

定理 1.2.4　赋范线性空间 $(V,\|\cdot\|)$ 是有限维的当且仅当 V 的任一有界闭集是紧集．

证明　$(\Rightarrow)$ 设 V 是有限维的，记 n 是 V 的维数．由定理 1.2.2 知存在线性同构与同胚 $\pi: V \to \mathbf{K}^n$. 设 E 为 $(V,\|\cdot\|)$ 中的有界闭集，则 $\pi(E)$ 是 $(\mathbf{K}^n,\|\cdot\|_2)$ 中的有界闭集，从而是紧集．因此由习题 1.1.7 知 $E = \pi^{-1}(\pi(E))$ 是 $(V,\|\cdot\|)$ 中的紧子集．

$(\Leftarrow)$ 假设V是无限维的．令$S=\{x\in V \mid \|x\|=1\}$，则$S$为$(V,\|\cdot\|)$中的有界闭集，从而是紧集．任取$x_1\in S$，记$V_1$是由$x_1$生成的子空间，则$V_1$是$V$的有限维的（实际上是1维的）真子空间．由定理1.2.2之后的讨论可知V_1是V真闭子空间．从而由引理1.2.3知：存在$x_2\in S$，使得$\|x-x_2\|\geq\frac{1}{2}(\forall x\in V_1)$,特别有$\|x_1-x_2\|\geq\frac{1}{2}$．记$V_2$是由$x_1$与$x_2$生成的$V$的真闭子空间．再由引理1.2.3知：存在$x_3\in S$，使得对一切$x\in V_2$，有$\|x-x_3\|\geq\frac{1}{2}$．特别有

$$\|x_i-x_3\|\geq\frac{1}{2},(i=1,2).$$

如此继续，可得$x_n\in S$，使得$\|x_n-x_m\|\geq\frac{1}{2}(m,n=1,2,\cdots)$．显然,$S$中的无穷点列$\{x_n\}$没有收敛子列．这与$S$列紧矛盾．证毕.

习题 1.2

1．设$C(\mathbf{K})$是全体收敛数列$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$之集，其中$x_n\in\mathbf{K}$．对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in C(\mathbf{K})$，定义

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|:n\in\mathbf{N}\},$$

则$C(\mathbf{K})$关于类似于$S(\mathbf{K})$中的运算及范数$\|\cdot\|_\infty$为$\mathbf{K}$上可分的 Banach 空间.

2．设$l^\infty(\mathbf{K})$表示数域$\mathbf{K}$中的全体有界数列$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$之集.对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^\infty(\mathbf{K})$，定义

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|:n\in\mathbf{N}\}.$$

证明:关于类似于$S(\mathbf{K})$中的运算，$(l^\infty(\mathbf{K}),\|\cdot\|_\infty)$为可分的 Banach 空间且$C(\mathbf{K})$是$l^\infty(\mathbf{K})$的真闭子空间.

3．证明: (i) 若$y=\varphi(x)$在$[0,\infty)$上严格递增，$\varphi(0)=0$，且$x=\psi(y)$是$y=\varphi(x)$的反函数，则$\forall a,b\geq 0$有

$$ab\leq\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy.$$

提示: 应用定积分的几何意义.

(ii) 对$\varphi(x)=x^{p-1}$与$\psi(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$应用(i)证明

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

其中 $a,b \ge 0$，$p>1$，$q=\dfrac{p}{p-1}$.

(iii) 对于 $f \in L^p[a,b]\setminus\{0\}$ 与 $g \in L^q[a,b]\setminus\{0\}$，记

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \text{ 与 } b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

应用(ii)中的不等式证明 Holder 不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

其中 $p>q$，$q=\dfrac{p}{p-1}$. (注意：不等式对 $f=0$ 或 $g=0$ 也成立).

(iv) 证明不等式

$$|\alpha+\beta|^p \le (|\alpha|+|\beta|)^p \le (2\max\{|\alpha|,|\beta|\})^p$$
$$\le 2^p(|\alpha|^p+|\beta|^p).$$

由此证明 $L^p[a,b]$ 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间且

$$\|f+g\|_p \le 2\left[(\|f\|_p)^p+(\|g\|_p)^p\right]^{\frac{1}{p}}, \text{其中 } p>1.$$

(v) 对 $g,f \in L^p[a,b]$，应用不等式

$$|f+g|^p \le (|f|+|g|)^{p-1}|f| + (|f|+|g|)^{p-1}|g|$$

与 Holder 不等式，证明 Minkowski 不等式

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(vi) 证明：有理系数的多项式在 $L^p[a,b]$ 中稠密，从而它可分．进而证明 $L^p[a,b]$ $(p \ge 1)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间.

4．设 $\{f_n\}$ 是 $L^p[a,b]$ 中的基本列，证明:

(i) 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p<\infty$；

(ii) 应用逐项积分定理与 Hölder 不等式证明(i)中得到的子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{n_{k+1}}(t)-f_{n_k}(t)\right]$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处绝对收敛；

(iii) 证明: $\{f_{n_k}(t)\}$ 在 $[a,b]$ 几乎处处收敛于某个可测函数 $f(t)$；

(iv) 应用 Fatou 引理证明：$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得

$$n \geq N \Rightarrow \| f_n - f \|_p < \varepsilon ;$$

(v) 证明: $f \in L^p[a,b]$ 且 $\{f_n\}$ 强收敛于 f；

(vi) 证明: $L^p[a,b](1 \leq p < \infty)$ 是 Banach 空间.

5．证明：有限维线性空间 V 上的任意两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价，即存在正数 L 与 L' 使得

$$L \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq L' \| x \|_2, \forall x \in V.$$

提示：应用定理 1.2.2.

6．设 $(V, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间，证明:

(i) 对 V 中任一基本列 $\{x_n\}$，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \| < \infty ;$$

(ii) 若 V 中的基本列 $\{x_n\}$ 有收敛子列，则 $\{x_n\}$ 必收敛；

(iii) 如果 $\forall x_n \in V(n = 1,2,\cdots)$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 收敛(即} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ 收敛)},$$

则 $(V, \|\cdot\|)$ 必完备；

(iv) 如果 $(V, \|\cdot\|)$ 完备，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0, \exists N$，使得当 $m > n > N$ 时，有 $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$；

这是数学分析级数收敛的 Cauchy 准则的推广.

(v) 如果 $(V, \|\cdot\|)$ 完备，则 V 中绝对收敛的级数必收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 收敛}.$$

以上的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 可称为向量值级数，简称级数.

7．设 M 为赋范空间 V 的闭子空间，记

$$[x] = \{ y \in V \mid x - y \in M \}, V/M = \{ [x] \mid x \in V \},$$

规定：$[x] + [y] = [x + y], \alpha[x] = [\alpha x](\alpha \in \mathbf{K})$，且

$$\| [x] \| = \rho(x, M) = \inf\{ \| x - y \|: y \in M \}.$$

证明：

(i) V/M 中的运算定义合理，即

$$x' \in [x], y' \in [y] \Rightarrow [x'+y'] = [x+y], [\alpha x'] = [\alpha x]；$$

(ii) 在以上线性运算下，V/M 成为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间且 M 为零元；

(iii) $|||\cdot|||$ 的定义合理，即

$$x' \in [x] \Rightarrow \rho(x', M) = \rho(x, M)；$$

(iv) $\left(V/M, |||\cdot|||\right)$ 是 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间；

(v) 如果 V 完备，则 V/M 也完备；

(vi) 定义 $\pi : V \to V/M$ 如下：$\pi x = [x]$，则 π 是线性映射且

$$|||\pi x||| \le \|x\| \ (x \in V)，$$

从而 π 连续.

8. 设 X 为赋范线性空间，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为 X 中的级数，如果部分的极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

存在,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,并称这个极限为级数的和；如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛. 证明:

(1) 若 X 为 Banach 空间,则 X 中的任一绝对收敛的级数必收敛;

(2) X 为 Banach 空间当且仅当 X 中的任一绝对收敛的级数都收敛.

§1.3　内积空间

在§1.1 与§1.2 中，我们学习了距离空间与赋范线性空间的概念与基本理论．通过许多问题的讨论，我们看到：距离的概念实质上是 $\mathbf{R}^n$ 中距离概念的推广，范数实际上是 $\mathbf{R}^n$ 中向量长度的推广，其方法是：在任一非空集上定义任意两点的距离，从而得到距离空间，在线性空间中引入任一向量的范数，得到了赋范线性空间，在这两种空间上，讨论的许多问题实际上是 $\mathbf{R}^n$ 中相应问题的推广与一般化．但在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，除了向量的长度

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

之外，还有一个重要概念就是“内积”，正是由于$\mathbf{R}^n$具有内积，因此有了向量之间的夹角，这就使得$\mathbf{R}^n$具有非常好的几何性质（如正交性、投形、直交分解等），本节我们将推广内积的概念到一般线性空间，从而得到内积空间，在内积空间中，有与$\mathbf{R}^n$类似的许多几何性质，使得空间的结构更加直观.

1.3.1 内积空间的概念与基本性质

为了在线性空间中引入内积，首先回顾一下欧氏空间

$$\mathbf{K}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{K}\}$$

中的内积及其性质，其中$\mathbf{K} = \mathbf{R}$或$\mathbf{C}$.

对$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{K}^n$，则$x$与$y$的内积定义为

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

其中$\overline{y_i}$表示复数y_i的共轭，并且内积与长度有以下关系：

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

由定义易见内积具有以下性质：$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, x, y, z \in \mathbf{K}^n$,

1° $\forall x \in \mathbf{K}^n, \langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$（零向量）;

2° $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$，;

3° $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \forall x, y \in \mathbf{K}^n$.

在$\mathbf{K}^n$中讨论的许多几何问题(正交性、夹角等)完全由内积性质 1°—3°决定. 实际上，内积是满足以上条件 1°—3°的一个二元函数

$$\langle x, y\rangle : \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K},$$

因此，便可在线性空间中定义内积.

定义 1.3.1 设V是$\mathbf{K}$上的线性空间，如果二元函数$\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbf{K}$满足条件：

($\mathbf{I}_1$) $\forall x \in V, \langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$（$V$中零元）;

($\mathbf{I}_2$) $\forall x, y, z \in V$及$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$有

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle;$$

($\mathbf{I}_3$) $\forall x, y \in V$, 有$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

则称$\langle \cdot, \cdot\rangle$为线性空间$V$上的内积，且称$\langle x, y\rangle$是$x$与$y$的内积，这时称赋有内积

的线性空间 V 是内积空间.

由定义可知：$\forall x,y,z\in V$ 及 $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$，有

$$\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\langle \alpha y+\beta z,x\rangle}=\overline{\alpha\langle y,x\rangle+\beta\langle z,x\rangle}=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle .$$

特别

$$\langle \alpha x,\alpha x\rangle=\alpha\langle x,\alpha x\rangle=\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle=|\alpha|^2\langle x,x\rangle .$$

于是，函数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 满足范数公理的条件 (N_1) 与 (N_2)，为了证明 $\|\cdot\|$ 满足条件

(N_3) : $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$，

先证明以下引理.

引理 1.3.2(Schwartz 不等式)　设 $V\equiv(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，则 $\forall x,y\in V$ 有

$$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|,$$

且等号成立 $\Leftrightarrow$ x 与 y 线性相关.

证明　设 $x,y\in V$，如果 $y=0$，则

$$\langle x,y\rangle=\langle x,0\rangle=\langle x,\alpha\cdot 0\rangle=\overline{\alpha}\langle x,0\rangle,(\forall\alpha\in\mathbf{K}).$$

从而 $\langle x,0\rangle=0$，可见不等式成立，如果 $y\neq 0$，则在不等式

$$\begin{aligned}0&\le\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\overline{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha(\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\langle y,y\rangle)\end{aligned}$$

中取 $\alpha=\dfrac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}$，得

$$0\le\langle x,x\rangle-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\cdot\langle x,y\rangle ,$$

即 $\|x\|^2\|y\|^2\ge|\langle x,y\rangle|^2$. 从而, $\|x\|\cdot\|y\|\ge|\langle x,y\rangle|$. 由此可见:Schwartz 不等式成立.

如果 x 与 y 线性相关，比如 $y=\alpha x$ $(\alpha\in\mathbf{K})$，则不等式中的等号成立. 反之，若等号成立，则由以上的证明过程可知 $\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle=0$，即 $x=\alpha y$. 可见 x 与 y 线性相关.

由 Schwartz 不等式可得：$\forall x,y\in V$，$\lambda\in\mathbf{K}$，$\mathrm{Re}\lambda$ 表示 λ 的实部，则

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle\\&=\langle x,x\rangle+2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&\le\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|\mathrm{x}\|+\|\mathrm{y}\|)^2 .\end{aligned}$$

因此，$\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

定理 1.3.3 若V是内积空间，则$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$定了$V$中的范数，从而$\langle V,\|\cdot\|\rangle$是赋范空间.

由此可见：内积空间必为赋范空间，从而可在其上讨论各种与范数有关的问题（如收敛性与连续性等），那么自然要问：赋范空间一定是内积空间吗？为了回答这个问题，首先必须研究一下内积空间中范数与内积的关系，应用内积的性质可以证明在内积空间V中成立：$\forall x, y \in V$，

(a) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$;

(b) 当$\mathbf{K}=\mathbf{C}$时，有

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right\};$$

(c) 当$\mathbf{K}=\mathbf{R}$时，有

$$\langle x, y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

公式(a)称为平行四边形公式，它是通常“平行四边形的对角线平方和等于各边平方之和”这一性质的推广．公式(b)与(c)称为极化恒等式，它给出了内积与范数的联系.

可以证明：如果赋范空间V中的范数$\|\cdot\|$满足公式(a)，则由公式(b)或(c)就可确定V中的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$使得$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $(\forall x\in V)$．因此，平行四边形公式是内积空间的特征性质.

前面已经知道，距离空间中的距离ρ与赋范空间中的范数$\|\cdot\|$都是自动连续的，那么自然要问：内积空间中的内积连续吗？设$\langle\cdot,\cdot\rangle$是线性空间$V$中的内积，由它可得到两个函数

$$x \mapsto \langle x, y_0\rangle : V \to \mathbf{K} \text{ 与 } (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle : V\times V\to\mathbf{K},$$

其中$y_0\in V$是任一固向量，$V\times V$如定理 1.2.2 所述，问题是：这两个函数连续吗？

设$x_n, y_n, x, y\in V$ $(n\in\mathbf{N})$满足$x_n\to x, y_n\to y$ $(n\to\infty)$，则由 Schwartz 不等式及范数的连续性知

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_0\rangle-\langle x, y_0\rangle| &= |\langle x_n-x, y_0\rangle| \\ &\le \|y_0\|\cdot\|x_n-x\| \to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle-\langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n-y\rangle+\langle x_n-x, y\rangle| \\ &\le \|x_n\|\cdot\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\cdot\|y\| \to 0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y_0\rangle = \langle x, y_0\rangle$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$．可见,内积函数自动连续且分别连续（即固定一个变量关于另一个变量连续）.

下面给出一些常用的例子.

例 1 线性空间 $\mathbf{K}^n$ 关于内积 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ 为 Hilbert 空间.

例 2 线性空间 $L^2[a,b]$ 关于内积

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

是 Hilbert 空间.

例 3 线性空间 $l^2(\mathbf{K})$ 关于 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ 为 Hilbert 空间.

若赋范空间 $(V, \|\cdot\|)$ 中存在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \ (\forall x \in V),$$

则称 $(V, \|\cdot\|)$ 可内积化；否则称 $(V, \|\cdot\|)$ 不可内积化.于是,$(V, \|\cdot\|)$ 可内积化当且仅当 V 中的范数满足平行四边形公式.

例 4 当 $p \neq 2$ 时，赋范空间 $l^p(\mathbf{K})$ 不可内积化，因为

$$x = (1,1,0,0,\cdots),\ y = (1,-1,0,0,\cdots) \in l^p(\mathbf{K})$$

不满足平行四边形公式.

例 5 Banach 空间 $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 不可内积化，因为函数

$$x(t) \equiv 1,\ y(t) = \frac{t-a}{b-a} \in C[a,b]$$

不满足平行四边形公式. 但是，$C[a,b]$ 作为 $L^2[a,b]$ 的子空间，关于内积

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

成为内积空间,但不完备.

注 应用 Hamel 基可以证明线性空间上均可定义内积.

1.3.2 正交分解

在通常的三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中，任取一个过原点的平面 M，则空间中的任一向量 x 都分解为 M 的法线上的一个向量 y 与 M 中的一个向量 z 之和，其中 y 是 x 在法线上的投影，而 z 是 x 在 M 中的投影. 显然 y 与 z 正交，即 $\langle y, x\rangle = 0$，在这种特殊情况启发下，问这种分解在一般内积空间中是否成立？

既然 z 是向量 x 在 M 中的投影，那么向量 z 的终点就是 x 的终点到平面 M

的最近点，即

$$\| x-z \|=\rho(x,M)=\inf\{\| x-m\|: m\in M\}.$$

因此，只要找到这个最近点，投影也就找到了，为了在一般内积空间中讨论向量的正交分解问题，先引入两个向量正交与正交分解的概念，并指出它们的一些性质.

定义 1.3.4 内积空间V中的两个向量x与y叫做正交的，是指它们的内积为零，即$\langle x,y\rangle=0$，这时记为$x\perp y$．对V的子集M及$x\in V$，如果x与M中的任一元素正交，则称x与M正交，记为$x\perp M$．V中与M正交的所有元素之集记为$M^{\perp}$，称为M的正交补.

命题 1.3.5 设V为内积空间，则

(i) 当$x_1\perp x_2$时，$\| x_1\pm x_2\|^2=\| x_1\|^2+\| x_2\|^2$；

(ii) $x=0\Leftrightarrow x$与V的一个稠子集正交；

(iii) 对任一$M\subset V$，$M^{\perp}$是闭子空间；

(iv) 当M为 Hilbert 空间V的闭子空间时，对于任意$x\in V$，存在$x_0\in M$使得

$$\| x-x_0\|=d(x,M)=\inf\{\| x-m\|: m\in M\},$$

并且$x-x_0\in M^{\perp}$.

证明 (i) 由等式

$$\| x_1+x_2\|^2=\| x_1\|^2+2\mathrm{Re}\langle x_1,x_2\rangle+\| x_2\|^2$$

知：当$x_1\perp x_2$时，$\| x_1\pm x_2\|^2=\| x_1\|^2+\| x_2\|^2$.

(ii) 必要性显然．为了证充分性，设x与V的稠子集D正交，由于$x\in V=\overline{D}$，从而存在$x_n\in D\,(n=1,2,\cdots)$使得$x_n\to x\quad(n\to\infty)$．于是,由 Schwartz 不等式知：

$$\begin{aligned}0\le\langle x,x\rangle&=\langle x,x-x_n\rangle\\&\le\| x\|\cdot\| x-x_n\|\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

从而$\langle x,x\rangle=0$，即$x=0$.

(iii) 设$x_1,x_2\in M^{\perp}$及$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$，则$\forall x\in M$有

$$\langle \alpha x_1+\beta x_2,x\rangle=\alpha\langle x_1 x\rangle+\beta\langle x_2,x\rangle=0.$$

因此，$\alpha x_1+\beta x_2\in M^{\perp}$，可见$M^{\perp}$是$V$的子空间．为证$M^{\perp}$是闭的，任取$x_0\in\overline{M^{\perp}}$，于是存在$x_n\in M^{\perp}(n=1,2,\cdots)$使得$x_n\to x_0\,(n\to\infty)$．于是$\forall x\in M$有

$$\langle x_0,x\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}x_n,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,x\rangle=0.$$

因而 $x_0 \perp x$．由 $x\in M$ 的任意性可知 $x_0 \in M^{\perp}$．这就证明 $M^{\perp}$ 是 V 的闭子空间.

(iv)　首先由确界定义知存在 $x_n \in M$ $(n=1,2,\cdots)$ 使得

$$\| x_n - x \| \to \alpha = d(x,M)(n\to\infty).$$

由于 $\frac{x_m + x_n}{2} \in M$，则 $\| x - \frac{x_m + x_n}{2} \| \ge \alpha\ (m,n\in \mathbf{N})$．再应用平行四边形公式，则当 $m,n\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}\| x_m - x_n \|^2 &= \| (x_m - x) + (x - x_n) \|^2 \\ &= 2\| x_m - x \|^2 + 2\| x - x_n \|^2 - 4\| x - \frac{x_m + x_n}{2} \|^2 \\ &\le 2\| x_m - x \|^2 + 2\| x_n - x \|^2 - 4\alpha^2 \to 0.\end{aligned}$$

可见，$\{x_n\}$ 是完备空间 M (因 M 是完备空间 V 的闭子空间)中的基本列，于是存在 $x_0 \in M$ 使得 $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$．从而

$$\| x - x_0 \| = \| \lim_{n\to\infty}(x - x_n) \| = \lim_{n\to\infty} \| x - x_n \| = d(x,M).$$

下证 $x - x_0 \in M^{\perp}$．若不然，则存在向量 $y\in M$ 使得 $\langle x - x_0, y\rangle \ne 0$．显然 $y\ne 0$．另一方面，$\forall \alpha\in \mathbf{K}$ 有

$$\begin{aligned}0 \le \| x - x_0 - \alpha y \|^2 &= \langle x - x_0 - \alpha y, x - x_0 - \alpha y\rangle \\ &= \langle x - x_0, x - x_0\rangle - \bar{\alpha}\langle x - x_0, y\rangle \\ &\quad - \alpha(\langle y, x - x_0\rangle - \bar{\alpha}\langle y, y\rangle).\end{aligned}$$

特别，取 $\alpha = \frac{\langle y, x - x_0\rangle}{\langle y, y\rangle}$ 代入上式得

$$\| x - x_0 - \alpha y \|^2 = \| x - x_0 \|^2 - \frac{|\langle x - x_0, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} < [\rho(x,M)]^2.$$

又 $x_0 - \alpha y \in M$，从而 $\| x - x_0 - \alpha y \|^2 \ge [\rho(x,M)]^2$，矛盾．因此 $x - x_0 \in M^{\perp}$．证毕.

以下讨论正交分解问题．设 M 是 Hilbert 空间 V 的闭子空间，则由命题 1.3.5(iv)知：$\forall x\in V$ 可分解为 $x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in M$，$x_2 \in M^{\perp}$，显然 $x_1 \perp x_2$．这种分解是否唯一呢？为此,设 x 又可分解为

$$x = y_1 + y_2, \text{其中 } y_1 \in M, y_2 \in M^{\perp},$$

则 $x_1 - y_1 \in M$ 且 $x_2 - y_2 \in M^{\perp}$．因此,由命题 1.3.5(i)知:

$$\begin{aligned}0 &= \| x-x \|^2 = \| x_1+x_2-y_1-y_2 \|^2 \\ &= \| (x_1-y_1)+(x_2-y_2) \|^2 \\ &= \| x_1-y_1 \|^2 + \| x_2-y_2 \|^2 .\end{aligned}$$

因此$x_1 = y_1$且$x_2 = y_2$. 可见，以上分解式还是唯一的.

由上面的讨论可知.

定理 1.3.6 设M是 Hilbert 空间V的闭子空间，则V中任一元x可唯一地分解为

$$x = x_1 + x_2 ,$$

其中$x_1 \in M, x_2 \in M^{\perp}$, 这时记$V = M \oplus M^{\perp}$，称为$V$的正交分解.

此定理称为 Hilbert 空间的正交分解定理.

1.3.3 正规正交系

我们知道n维欧氏空间$\mathbf{K}^n$中有一个标准正交基

$$e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,0\cdots,0),\cdots, e_n = (0,0,\cdots,0,1)$$

使得$\mathbf{K}^n$中任一向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$可唯一地表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

受这一事实的启示，我们自然要问：在一般无穷维内积空间中是否有类似的展开式呢？为了讨论这一问题，先介绍正规正交系的概念,并讨论其基本性质.

定义 1.3.7 设M是内积空间V中的不含零元的非空子集，如果M中的任何两个不同的向量彼此正交，则称M是V的正交系，又若M中的每个向量的范数都是 1，则称M为V中的正规正交系.

由定义可知$M = \{e_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$是$\mathbf{K}^n$中的正规正交系. 又例如三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

是$L^2[0,2\pi]$中的正规正交系，其中内积定义为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx .$$

下面我们讨论正交系的基本性质.

命题 1.3.8 设M为内积空间V中的正交系，则

(i) 对任意$x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$有

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2;$$

(ii) M 是V 的线性无关集，即M 中任意有限多个向量必线性无关.

证明 (i) 由等式

$$\|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2=\langle\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{j=1}^{n}x_j\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\langle x_i,x_j\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\langle x_ix_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

可知(i)成立.

(ii) 任取$x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$，如果存在$\alpha_i\in\mathbf{K}$使得$\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i=0$，则由$M$ 的正交性可知：$\forall j\in\{1,2,\cdots,n\}$有

$$0=\langle\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i,x_j\rangle=\alpha_j\langle x_j,x_j\rangle=\alpha_j\|x_j\|^2.$$

于是$\alpha_j=0\ (j=1,2,\cdots,n)$. 因此，$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关. 证毕.

有了正规正交系之后，就可以考虑空间中任意向量关于指定系的展开式. 为此，先引入赋范空间中收敛级数的概念.

定义 1.3.9 设$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是赋范空间$(V,\|\cdot\|)$中的点列，称记号

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$$

是V 中的级数. 如果其部分和点列$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$ 在V 中收敛于向量x，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，且称x 为这个级数之和，记为$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x$.

若M 为内积空间V 中的正规正交系，且$e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots$为$M$ 中可数个互不相同的元素，$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i$，则由内积的连续性可知，$\forall j\in\{1,2,\cdots\}$都有

$$\langle x,e_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_j\langle e_i,e_j\rangle=\alpha_j.$$

因此，$x=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,e_j\rangle e_j$. 这说明：若$x$可用可数个正规正交元素的无穷线性组合

表示，则表示的系数由x与这可数个正交向量的内积唯一确定．一般地，引入以下 Fourier 系数的概念．

定义 1.3.10 若M是内积空间V中的正规正交系，$x\in M$，则称$\langle x,e\rangle(e\in M)$是向量$x$关于正规正交系$M$的 Fourier 系数．

例如，在$L^2[0,2\pi]$中定义内积为

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx,$$

则函数$f\in L^2[0,2\pi]$关于三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

的 Fourier 系数为

$$a_0=\langle f,\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}f(t)dt,$$

$$a_n=\langle f,\cos nt\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos ntdt,$$

$$b_n=\langle f,\sin nt\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin ntdt,$$

$(n=1,2,\cdots)$，这正是通常的 Fourier 系数．

下面讨论 Fourier 系数的性质．

定理 1.3.11 设$M=\{e_i,e_2,\cdots\}$是 Hilbert 空间V中的正规正交系，则

(i) $\forall x\in V$，有 Bessel 不等式成立，即$\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2$；

(ii) 若$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i$，则$\alpha_i=\langle x,e_i\rangle\ (i\in\mathbf{N})$；

(iii) 级数$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i$收敛$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$收敛；

(iv) $\forall x\in V$，级数$\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$恒收敛．

证明 (i) 对任一$n\in\mathbf{N}$有

$$0\le\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\|^2=\|x\|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\overline{\alpha_i}\langle x,e_i\rangle+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2.$$

把$\alpha_i=\langle x,e_i\rangle$代入上式，得

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\le\|x\|^2 .$$

令$n\to\infty$，即得 Bessel 不等式.

(ii) 前面已证.

(iii) 由等式

$$\sum_{i=n+1}^{m}|\alpha_i|^2=\sum_{i=n+1}^{m}|\langle x,e_i\rangle|^2 \quad (m>n\ge 1)$$

及习题 1.2.6(v)可知.

(iv) 由 Bessel 不等式、(i)及(iii)可知.

由此可见，若 Hilbert 空间V有可数的正规正交系$\{e_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，则对任意$x\in V$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$收敛，自然要问：这个级数是否一定收敛到$x$本身呢？这个问题一般不对．若对每个$x\in V$，由它导出的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$ (称为x关于$\{e_n\mid n\in\mathbf{N}\}$的 Fourier 级数)都收敛于$x$，即

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i ,$$

则x必属于由$\{e_n\mid n\in\mathbf{N}\}$生成的闭子空间. 由$x\in V$的任意性可知$\{e_n\mid n\in\mathbf{N}\}$生成的子空间$L$在$V$中的稠密．反之，若$L$在$V$中的稠密，则由命题 1.3.5 知：$\forall x,y\in V$有

$$\langle x,e_n\rangle=\langle y,e_n\rangle\ (n\in\mathbf{N})\Leftrightarrow\langle x-y,e_n\rangle=0\ (n\in\mathbf{N}) .$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\perp e_n\ (n\in\mathbf{N})\Leftrightarrow x-y\perp L\Leftrightarrow x=y .$$

可见，V中任一向量由其 Fourier 系完全确定．又由定理 1.3.11 知：$\forall x\in V$，其 Fourier 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$恒收敛．设

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n ,$$

由定理 1.3.11(ii)知

$$\langle y,e_i\rangle=\langle x,e_n\rangle\ (n\in\mathbf{N}) .$$

由此可知$x=y$，从而$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$．这就证明了：$V$中任一向量的 Fourier 级数收敛于这个向量当且仅当$\{e_n\mid n\in\mathbf{N}\}$生成的子空间$L$在$V$中稠密．又由等

式

$$\| x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i \|^2=\| x \|^2 -\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2 \ (\alpha_i=\langle x,e_i\rangle)$$

可知

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n \Leftrightarrow \| x \|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2 .$$

综合上述讨论可得

定理 1.3.12 设$\{e_n \mid n\in \mathbf{N}\}$为 Hilbert 空间$V$中的可数正规正交系，则以下等价：

(i) $\forall x\in V$，x可展为 Fourier 级数，即$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$；

(ii) $\forall x\in V$，有 Parseval 等式成立，即$\| x \|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$；

(iii) $\{e_n\}$生成的子空间在V中稠密.

满足以上定理条件(i),(ii)及(iii)之一的正规正交系$\{e_n\}$称为完备系. 易见

$$e_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{in},\cdots)(i=1,2,\cdots),$$

是$l^2(\mathbf{K})$的完备系, 其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

三角函数系是$L^2[0,2\pi]$中的完备系吗？为了回答这一问题，只要证明三角函数系在$L^2[0,2\pi]$中稠密即可. 应用鲁津定理,可以证明:连续函数在$L^2[0,2\pi]$中稠密, 从而对任意$f\in L^2[0,2\pi]$及$\varepsilon>0$，存在$g\in C[0,2\pi]$使得$\| f-g \|_2<\varepsilon$. 又存在周期为2π的连续函数g_1，使得$\|g-g_1\|_2<\varepsilon$，再对于g_1，存在按段光滑、周期为2π的连续函数g_2使得$\| g_1-g_2 \|<\varepsilon$. 由于$g_2$的 Fourier 级数一致收敛于$g_2$，因此存在$n$使得

$$S_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

(其中a_0,a_k,b_k是g_2的 Fourier 系数)满足$\| g_2-S_n \|<\varepsilon$. 因此,

$$\|f-S_n\|_2\le\|f-g\|_2+\|g-g_1\|_2+\|g_1-g_2\|_2+\|g_2-S_n\|_2<4\varepsilon.$$

可见, 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

生成的子空间在 $L^2[0,2\pi]$ 中稠密，故它为 $L^2[0,2\pi]$ 中的完备系．于是对每个 $f \in L^2[0,2\pi]$ 有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ (b_0 = 0)$$

在 $L^2[0,2\pi]$ 中范数收敛意义下成立，且有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

注：本段讨论中，视 $L^2[0,2\pi]$ 为实的内积空间，其内积为

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx .$$

应用 Gram—Schmidt 正交化方法可以证明：任一可分无穷维 Hilbert 空间 V 都有完备的正规正交系 $\{e_n\}$．定义映射

$$T: V \to l^2(\mathbf{K})$$

为

$$Tx = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots),$$

其中 $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$ 为 x 的 Fourier 系数，易见 T 是线性映射，即 $\forall x, y \in V$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ 有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty .$$

又对于任意 $x, y \in V$，由于 $\{e_n\}$ 完备，从而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n ,\quad y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n .$$

由内积的连续性可知

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle \cdot \overline{\langle y, e_i\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle} = \langle Tx, Ty\rangle .$$

特别

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle} = \| Tx \|_2 .$$

可见，$T: V \to l^2(\mathbf{K})$ 是保持范数、保持内积的线性同构．在这种情况下称 V 与 $l^2(\mathbf{K})$ 等距内构．

习题 1.3

1. 证明：若V是内积空间，则对任何$x, y \in V$有平行四边形公式与极化恒等式成立.

2. 设$\langle \cdot,\cdot \rangle$是线性空间$V$的内积，证明对任何正数$\alpha \in \mathbf{R}, (x, y) = \alpha \langle x, y \rangle$也定义了$V$中的内积，这表示内积函数不是唯一的.

3. 设线性空间V有可数基, 即存在V中可数个元素$e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$使得$V$中任一向量都是有限个$e_i$的线性组合，试证$V$中存在内积使其成为内积空间.

4. 设M是内积空间V的有限维子空间，则

(i) M有正规正交基$e_1, e_2, \cdots, e_n$, 其中n为M的维数.

(ii) $\forall x \in V$，有

$$\rho(x, M) = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|.$$

(iii) $M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp} = M$.

5. 设V是实的内积空间，$x, y \in V$，试证:

$$x \perp y \Leftrightarrow \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

6. 设x, y为复内积空间V中两个向量，证明

$$x \perp y \Leftrightarrow \forall \alpha \in K，\| x + \alpha y \| \geq \| x \| .$$

提示：取α为实数证明$\mathrm{Re}\langle x, y \rangle = 0$，再取$\alpha$为纯虚数证明$I_m \langle x, y \rangle = 0$.

7. 设$M = \{e_i \mid i \in I\}$为 Hilbert 空间V中的正规正交系，$x \in V$，证明

(i) $I_\delta = \{i \mid i \in I且 |\langle x, e_i \rangle| \geq \delta\}$是有限集，其中$\delta > 0$；

(ii) $\{i \mid i \in I且\langle x, e_i \rangle \neq 0\}$最多可数.

提示：(i)用反证法及 Bessel 不等式，(ii)用(i).

8. 设M是 Hilbert 空间V中的闭子空间, 应用正交分解定理证明：$\forall x_0 \in V$有

$$\rho(x_o, M) = \sup\{|\langle x_0, y \rangle| : y \in M^{\perp}且\| y \| = 1\}.$$

9. 设$\{x_n\}$为内积空间V中的点列，$x \in V$，证明:

$$x_n \to x (n \to \infty) \Leftrightarrow \| x_n \| \to \| x \| 且\langle x_n, x \rangle \to \langle x, x \rangle .$$

10. 设M是 Hilbert 空间V中的闭子空间，$V = M \oplus M^{\perp}$是V中的正交分解. 定义$P : V \to M$如下

$$P(x_1 + x_2) = x_1, \forall x_1 \in M, x_2 \in M^{\perp}.$$

证明:

(i) P 是线性映射；

(ii) $\| Px \| \le \| x \|, (\forall x \in V)$，从而 P 连续；

(iii) $P(V)=M, P(M)=M, \ker(P)=M^{\perp}$；其中

$$\ker(P)=\{x \in V \mid P(x)=0\}$$

是 P 的零空间；

(iv) $P^2=P$，即 P 与 P 的复合是 P，

(v) $\forall x, y \in V$，有

$$\langle Px, Py\rangle=\langle Px, y\rangle=\langle x, Py\rangle;\ \langle x, x\rangle \ge \langle Px, x\rangle \ge 0;$$

(vi) $\forall x=x_1+x_2, y=y_1+y_2 \in M \oplus M^{\perp}=V$，有

$$\langle x, y\rangle=\langle x_1, y_1\rangle+\langle x_2, y_2\rangle, \| x \|^2=\| x_1 \|^2+\| y_1 \|^2,$$

其中 $x_1, y_1 \in M, x_2, y_2 \in M^{\perp}$；

(vii) $\forall x \in V, \| x \|=\sqrt{\| Px \|^2+\| x-Px \|^2}$.

这里的 P 称为 V 到 M 上的正交投影.

§1.4　拓扑空间简介

1.4.1 拓扑空间

前面已经指出，在一个集上引入距离的目的是为了确切表达“任意逼近”，也就是定义了极限. 经过引入适当的距离，我们看到：数学分析与实变函数论中的许多重要极限（如一致收敛，依测度收敛）都可以用距离收敛统一起来. 但是并非每种收敛都可以用距离来描述. 例如，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在集 X 上的逐点收敛（即处处收敛）就无法用距离来描述（当 X 为无限不可数集时）. 由此可见，距离并非是刻画收敛的万能工具. 为了描述更多的收敛性，必须寻找更广泛的方法. 这种方法就是在集合上引入适当的“拓扑”.

定义 1.4.1 设 X 为一非空集，$\Im$ 是 X 的一些子集做成的非空类. 如果 $\Im$ 满足：

(i) $\varnothing$ 与 $X \in \Im$；

(ii) 当 $A_\alpha \in \Im (\alpha \in I)$ 时，有 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \Im$；

(iii) 当 $A_\alpha \in \Im (\alpha \in I)$ 时，有 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \Im$，

则称 $\Im$ 为 X 上的一个拓扑，且称序偶 $(X, \Im)$ 为一个拓扑空间，称拓扑 $\Im$ 中的元素（X 的子集）为 X 的开集，开集的余集称为闭集.

例 1 设 (E, ρ) 为距离空间，$\Im$ 为 E 的全体开子集之集，则 $\Im$ 为 E 上的一个

拓扑，称为由距离ρ诱导的拓扑.

例 2 设X为任意非空集，$\Im$为X的一切子集之集，则易见$\Im$为X上的拓扑. 在这个拓扑下，X的任一子集既是开集又是闭集，称这个拓扑为离散拓扑.

例 3 设$X\neq\varnothing$，则$\Im=\{\varnothing,X\}$为X上的拓扑，称为X上的平凡拓扑.

例 4 设$X=(-\infty,\infty)$，令

$$\Im=\{S\mid S\subset X,\overline{\overline{X\setminus S}}\leq\aleph\}\cup\{\varnothing\},$$

则$\Im$为X上的拓扑.

在一个集合上，如果定义了拓扑，就有了开集与闭集的概念，进而可以定义邻域,从而描述收敛的概念.

定义 1.4.2 设$(X,\Im)$是一拓扑空间，$x\in X$，如果U是X中含x的一个开集，则称U为点x的一个邻域，x的全体邻域之集记为$N(x)$.

例如,若在$X=\{1,2,3\}$上赋以离散拓扑，则点1的邻域有

$$\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}.$$

定义 1.4.3 设$\{x_n\}$是拓扑空间$(X,\Im)$中的一个点列，$x_0\in X$.如果对$\forall U\in N(x_0),\exists N\in\mathbf{N}$,当$n\geq N$时，有$x_n\in U$，则称$\{x_n\}$依拓扑$\Im$收敛于$x_0$，记为$x_n\xrightarrow{\Im}x_0(n\to\infty)$或简记为$x_n\to x_0$，此时，称$x_0$为$\{x_n\}$的极限.

例 5 设$\{x_n\}$为拓扑空间$(X,\Im)$中的点列，$x_0\in X$如果$\Im$为X上的离散拓扑，则

$$x_n\xrightarrow{\Im}x_0(n\to\infty)\Leftrightarrow\exists N,\text{当}n\geq N\text{时，}\ x_n=x_N.$$

从而，此时收敛点列的极限是唯一的. 如果$\Im$为X上的平凡拓扑，则$\{x_n\}$收敛到X中任一元素x_0（因$N(x_0)=\{X\}$)，可见，此时极限不唯一除非X为单点集.

例 6 设X是非空集E上的某些函数组成的非空集，对每个$f\in X$及$\gamma>0$，定义

$$U(f;x_1,\cdots,x_n,\gamma)=\{g\mid g\in X,\max_{1\leq i\leq n}|g(x_i)-f(x_i)|<\lambda\},$$

其中$x_1,\cdots,x_n$为E中的任意n个点. 记$\Im$是所有形如

$$U(f;x_1,\cdots,x_n,\gamma)$$

的集的有限交的任意并得到的X的子集类,并且添上$\varnothing$. 容易证明：$\Im$是集E上的一个拓扑,且

$$f_n,f\in X(n=1,2,\cdots),f_n\xrightarrow{\Im}f$$

当且仅当

$$\forall x\in E,f_n(x)\to f(x)(n\to\infty).$$

因此，这种收敛等价于逐点收敛，故这种拓扑称为E上的逐点收敛拓扑.

由例5可见，拓扑空间中收敛点列的极限不一定唯一. 为了保证极限的唯一性，必须对拓扑作一定的限制，为此引入

定义 1.4.4 设$(X,\Im)$为一拓扑空间，如果对X中任一不同的点x与y，都存在各自的邻域$U\in N(x)$与$V\in N(y)$使的$U\cap V=\varnothing$，则称$\Im$为X上的Hausdorff 拓扑，且称$(X,\Im)$为Hausdorff拓扑空间.

例如，离散空间必为Hausdorff空间；任一距离空间（以距离诱导的拓扑）都是 Hausdorff 空间. 当X至少含两个不同点时，其上的平凡拓扑不是 Hausdorff 拓扑.

由定义可证：拓扑空间$(X,\Im)$是Hausdorff空间，由其中收敛点列的极限必唯一.

定义 1.4.5 设$(X,\Im_1)$与$(X_2,\Im_2)$是两个拓扑空间，定义

$$\Im_1\times\Im_2=\{U_1\times U_2 \mid U_i\in\Im_i(i=1,2)\}.$$

易见，$\Im_1\times\Im_2$是$X_1\times X_2$上的一个拓扑，称为由$\Im_1$与$\Im_2$的乘积拓扑，且称$(X_1\times X_2,\Im_1\times\Im_2)$为$(X_1,\Im_1)$与$(X_2,\Im_2)$的乘积空间.

例如，以通常的距离拓扑，$\mathbf{R}^2$是$\mathbf{R}$与$\mathbf{R}$的乘积空间. 一般地，$\mathbf{R}^n$是$\mathbf{R}^p$与$\mathbf{R}^q(p+q=n)$的乘积空间.

1.4.2 连续映射与同胚

定义 1.4.6 设$(X_{1,}\Im_1)$与$(X_2,\Im_2)$是两个拓扑空间，称映射$f:X_1\to X_2$在$x_0\in X_1$处连续，是指$\forall V\in N(f(x_0))$,存在$U\in N(x_0)$,使的$f(U)\subset V$. 如果f在X_1的每一点连续，则称f为连续映射.

容易证明：

$$f:(X_1,\Im_1)\to(X_2,\Im_2)\text{连续}\Leftrightarrow f^{-1}(\Im_2)\subset\Im_1,$$

即$\forall V\in\Im_2$,有$f^{-1}(V)\in\Im_1$.

定义 1.4.7 若$f:X_1\to X_2$为一一对应, 且

$$f:(X_1,\Im_1)\to(X_2,\Im_2)\text{与}f^{-1}:(X_2,\Im_2)\to(X_1,\Im_1)$$

都连续，则称f为$(X_1,\Im_1)$与$(X_2,\Im_2)$之间的同胚映射，且称这两个拓扑空间同胚，记为$(X_1,\Im_1)\overset{f}{\cong}(X_2,\Im_2)$.

由定义可证：如果$(X_1,\Im_1)\overset{f}{\cong}(X_2,\Im_2)$，则

(i) $\Im_1$ 是 Hausdorff 拓扑$\Leftrightarrow\Im_2$是 Hausdorff 拓扑.

(ii) V 是 X_1 中的开集（闭集）$\Leftrightarrow f(V)$ 是 X_2 中的开集（闭集）.

(iii) $\forall x_n, x_0 \in X_1$,有

$$x_n \xrightarrow{\mathfrak{I}_1} x_0 \Leftrightarrow f(x_n) \xrightarrow{\mathfrak{I}_2} f(x_0) .$$

由此可见，同胚的拓扑空间其性质完全类似，因而可以看作是相同的.

拓扑空间的内容非常丰富，本节仅作一点介绍，有兴趣的读者可参看有关的专门书籍.

第二章 Banach 空间上的有界线性算子理论

当讨论许多物理系统时，系统的状态可用某个线性空间中的向量表示．为了研究系统的运动或变化情况，往往需要考虑两个状态之间的依赖关系，这种关系常用状态空间(线性空间)之间的映射来描述．例如,在通讯系统中，输入信号 $r(t)$ 与输出信号 $c(t)$ 都是时间 t 的函数，而系统的作用则是将 $r(t)$ 变成 $c(t)$ 的变换：$c=Tr$．又如,在现代控制系统中，系统本身用算子 T 描述，这个算子将输入信号 $u(t)$ 映成输出信号 $y(t)$，即 $y=Tu$．

在最简单的情况下，经常认为描述系统的那个算子 T (映射)是“线性的”，即当某个输入信号是两个信号 φ_1 与 φ_2 的叠加时，认为输出信号也是相应的叠加，即成立

1° $T(\varphi_1+\varphi_2)=T\varphi_1+T\varphi_2$.

又当输入信号放大或缩小 λ 倍时，认为输出也放大或缩小同样的倍数，即下面条件成立

2° $T(\lambda\varphi)=\lambda T\varphi$.

满足条件1°、2°的映射称为线性映射，在泛函分析当中常称 T 为线性算子．

在处理实际问题时，由于人们对自然现象的认识总是近似的，加之许多数据只能靠观测或实验得到，这就要求一个有效的系统(即一个线性算子 T)能将相差不大的两个状态变成相差不大的另两个状态，即

$$x\approx y\Rightarrow Tx\approx Ty.$$

抽象地说，当考虑从一个赋范空间 $(V_1,\|\cdot\|_1)$ 到另一赋范空间 $(V_2,\|\cdot\|_2)$ 的线性算子 T 时，要求：

$$\|x-y\|_1 \text{很小} \Rightarrow \|Tx-Ty\|_2 \text{也很小}.$$

由于 T 是线性的，这个等价于

$$\|x\|_1 \text{很小} \Rightarrow \|Tx\|_2 \text{也很小}.$$

这个只要存在常数 $M>0$ 使得

3° $\|Tx\|_2\le M\|x\|_1, \forall x\in V_1$.

满足条件3°的线性算子称为有界的．有界线性算子是本章讨论的主要对象．当像空间 V_2 是数域 $\mathbf{K}$ 时，称以上的有界线性算子为有界线性泛函．

除了以上的实际问题外，数学本身也提出许多线性算子的问题．本章的目的就是给出有界线性算子(泛函)的严格定义与例子，并给出几个重要的基本定理(如泛函延拓定理、开映射原理与闭图像定理等)．

§2.1 有界线性算子

2.1.1 定义、例子与基本性质

本节及以后的讨论中，若不引起混乱，两个不同空间中的范数使用同一记号 $\|\cdot\|$．读者根据考虑的元素不同，可以看出使用那个空间中的范数．

定义 2.1.1 设 V_1 与 V_2 是同一数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间，D 是 V_1 的子空间，$T:D\to V_2$ 是一映射．如果 T 满足：

1° $\forall x,y\in D,\quad T(x+y)=Tx+Ty$，

则称 T 是可加的．如果 T 满足：

2° $\forall x\in D$ 及 $\lambda\in\mathbf{K}$，$T(\lambda x)=\lambda Tx$，

则称 T 是齐次的．如果 T 既是可加的又是齐次的，则称 T 是一个线性算子，其中 D 称为 T 的定义域，记为 $D(T)$，即 $D(T)=D$．如果 T 是线性算子且存在常数 $M>0$ 使得

3° $\forall x\in D(T),\quad \|Tx\|\le M\|x\|$，

则称 T 为有界线性算子．特别地，当 V_2 是数域 $\mathbf{K}$ 时，则称有界线性算子 T 为有界线性泛函．

下面介绍几个简单例子．

例 1 设 V 是赋范空间，定义

$$I:V\to V,\quad Ix=X(\forall x\in V),\quad \theta:V\to V,\quad \theta x=0(\forall x\in V),$$

则 I 与 θ 都是 V 上(即 V 到 V)的有界线性算子，分别称为恒等算子与零算子，零算子 θ 常记为 0(与数零用同一记号)．

例 2 解析几何中的旋转变换：

$$T:(x,y)\to(x',y'),\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

是实二维空间 $\mathbf{R}^2$ 上的有界线性算子，因为

$$\|T(x,y)\|=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)\|.$$

例 3 在 $\mathbf{K}^n$ 中令

$$e_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{in})\ (i=1,2,\cdots,n),$$

则 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{K}^n$，$x$ 可唯一地表示成

$$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$$

此时,$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}$．对数域$\mathbf{K}$上的任一$n\times n$矩阵$A=[a_{ij}]$，定义

$$Tx=\left(Ax^T\right)^T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),$$

其中x^T表示行向量x的转置，它是n维列向量，而且

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

于是,$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{K}^n$，有

$$\|Tx\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\xi_j\right|^2}$$
$$\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2}=\alpha\|x\|,$$

其中$\alpha=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2}$．可见，$T$是$\mathbf{K}^n$上的有界线性算子．因此，$\mathbf{K}$上的任一$n\times n$矩阵$A$定义一个有界线性算子$T$．

反之，若T为$\mathbf{K}^n$上的线性算子，令

$$Te_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i \ (j=1,2,\cdots,n),$$

则得到$n\times n$矩阵$A=[a_{ij}]$，且当$x\in\mathbf{K}^n$时，记

$$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j,$$

则

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\xi_j Te_j=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right)e_i$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\xi_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\xi_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}\xi_j\right)$$
$$=(Ax^T)^T.$$

这表明:线性算子T由$n\times n$矩阵A确定.由前边的讨论可知:T是有界线性算子.

例4 定义$T:C[a,b]\to C[a,b]$如下：

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau\,,$$

则T是有界线性算子，称为积分算子.

例 5 记$C^1[a,b]=\{f\mid f'\in C[a,b]\}$并赋范数$\|\cdot\|_\infty$，我们定义算子$D:C^1[a,b]\to C[a,b]$如下：

$$\forall t\in[a,b]\,,\ (Dx)(t)=x'(t)\,,$$

则D是线性算子但无界(即不是有界的). 因为,若D有界，则存在常数$M>0$使得

$$\|Dx\|_\infty\le M\|x\|_\infty,\forall x\in C'[a,b]\,.$$

但对$\varphi_n(t)=\sin n(t-a)$，$\psi_n(t)=\cos n(t-a)$，有

$$\varphi_n\in C^1[a,b]\quad(n=1,2,\cdots)\,,$$

且对任一$n\in\mathbf{N}$有

$$n=\|n\psi_n\|_\infty=\|D\varphi_n\|_\infty\le M\|\varphi_n\|_\infty\le M\,.$$

这是不可能的. 这里的算子D称为微分算子.

例6 定义$f:C[a,b]\to\mathbf{R}$如下：

$$f(x)=\int_a^b x(t)dt\,,$$

则f是$C[a,b]$上的有界线性泛函.

例 7 对于内积空间V中的任一向量y，我们定义泛函$f:V\to\mathbf{K}$如下：$f(x)=\langle x,y\rangle$，则由 Schwartz 不等式知f是有界线性泛函.

下面讨论有界线性算子的基本性质. 首先，线性算子的有界性与连续性有何关系呢？为了回答这一问题，设V_1，V_2是赋范线性空间，D是V_1的子空间，且线性算子$T:D\to V_2$是有界的，于是存在常数$M>0$，使得

$$\|Tx\|\le M\|x\|\,(\forall x\in D)\,.$$

设$x_n,x\in D(n\in\mathbf{N})$且$x_n\to x(n\to\infty)$，则由$T$的线性性质可知

$$\begin{aligned}\|Tx_n-Tx\|&=\|T(x_n-x)\|\\&\le M\|x_n-x\|\\&\to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

因此$Tx_n\to Tx\,(n\to\infty)$. 从而T是连续的. 这说明：

线性算子的有界性$\Rightarrow$连续性.

反之如何？为此，我们设线性算子$T:D\to V_2$连续. 如果T不是有界的，则

$\forall n \in \mathbf{N}$，存在$x_n \in D$，使得$\| Tx_n \| > n \| x_n \|$．令

$$y_n = \frac{x_n}{n \| x_n \|},$$

则$x_n \in D$，从而$y_n \in D$且$\| y_n \| = 1/n (n = 1,2,\cdots)$．可见$y_n \to 0 \ (n \to \infty)$.但是

$$\| Ty_n \| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| Tx_n \| \geq 1 \ (n = 1,2,\cdots),$$

显然，$T0 = 0$．于是$\| Ty_n - T0 \| \geq 1 \ (n = 1,2,\cdots)$．由此可见$\lim\limits_{n \to \infty} Ty_n \neq T0$，这与$T$连续矛盾．这表明：线性算子的有界性与连续性等价．这就证明了以下结论:

定理 2.1.2 设V_1，V_2是赋范线性空间，D为V_1的子空间，则线性算子$T: D \to V_2$有界当且仅当T连续.

在数学分析中称函数$f: D \to \mathbf{R}$是有界的，是指存在常数$M > 0$，使得$\forall x \in D$, 有$| f(x) | \leq M$，即$f(D)$是$\mathbf{R}$中的有界集．有界函数的概念自然可以推广到一般映射(算子)．如对映射$T: D \to V_2$ ($D \subset V_1$为任一非空子集)，若存在常数$M > 0$使得

$$\| Tx \| \leq M (x \in D),$$

则称T是有界映射．那么为什么不用这种方式定义线性算子的有界性呢？事实上，若线性算子$T: D \to V_2$满足条件：

$$\exists M > 0 \text{ 使得 } \forall x \in D, \| Tx \| \leq M,$$

则$Tx = 0 (\forall x \in D)$，即T为零算子．否则，若有$x_0 \in D$使得$Tx_0 \neq 0$，则$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+$有($\mathbf{R}^+$表示正实数之集)

$$\lambda \| Tx_0 \| = \| T \lambda x_0 \| \leq M.$$

但当$\lambda \to \infty$时，上式左边趋于∞，这显然不可能．由此可见，如此定义的有界性仅对恒为零的算子适合，显然是没有意义的．这样自然要问：有界算子与有界映射有何关系呢？下面的定理回答了这一问题.

定理 2.1.3 设V_1, V_2是赋范线性空间，且$D \subset V_1$为线性子空间，$T: D \to V_2$是线性算子，则T是有界线性算子当且仅当T将D中的任一有界集映成V_2中的有界集，即对任一D的有界子集S都有$T(S) \subset V_2$是有界集.

证明　($\Rightarrow$) 设$T: D \to V_2$有界，则存在$M > 0$使得对任意$x \in D$有$\| Tx \| \leq M \| x \|$．设S为D的有界子集，则存在$K > 0$使得$\forall x \in S$，有$\| x \| \leq K$．从而对任意$x \in S$有

$$\| Tx \| \leq M \| x \| \leq MK.$$

则$T(S)$为V_2中的有界集.

($\Leftarrow$) 设$S=\{x\in D \mid \|x\|=1\}$为$D$中的单位球面，则由假设知$T(S)$为$V_2$中的有界集，即$\exists M>0$，使得$\forall x\in S$有

$$\|Tx\|\le M .$$

$\forall y\in D\setminus\{0\}$，令$x=\dfrac{y}{\|y\|}$，则$x\in S$. 从而

$$\|Tx\|=\left\|T\left(\frac{1}{\|y\|}y\right)\right\|=\frac{1}{\|y\|}\|Ty\|\le M .$$

从而$\|Ty\|\le M\|y\|(\forall y\in 0)$. 因此，$T$是有界线性算子. 证毕.

2.1.2 有界线性算子的范数

前面已经指出：线性算子$T:D\to V_2$是有界的是指存在常数$M>0$，使得$\|Tx\|\le M\|x\|(\forall x\in D)$. 这样的$M$如果存在，则有无穷多个. 我们感兴趣的自然是这样的M中最小的一个，因为再比它小的任一数就不满足要求了.由此，我们引入有界线性算子范数的概念.

定义 2.1.4 设$T:D\to V_2$是有界线性算子，称

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\in D\setminus\{0\}\right\}$$

为T的范数，记为$\|T\|$，即

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\in D\setminus\{0\}\right\}.$$

显然,算子范数$\|\cdot\|$有以性质：

1° $\|T\|<\infty,\forall x\in D,\|Tx\|\le\|T\|\cdot\|x\|$；

2° $\|T\|=0\Leftrightarrow T$是零算子；

3° $\|T\|=\sup\{\|Tx\|:x\in D且\|x\|\le 1\}$
$=\sup\{\|Tx\|:x\in D且\|x\|=1\}$.

由于数域$\mathbf{K}$中的范数就是通常的绝对值或复数的模，从而线性泛函$f:D\to\mathbf{K}$(D为赋范空间V的子空间)是有界的,实际上说：存在$M>0$使得

$$|f(x)|\le M\|x\|,\forall x\in D .$$

而相应的范数为

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|}:x\in D\setminus\{0\}\right\}$$
$$=\sup\{|f(x)|:x\in D,\|x\|=1\}$$
$$=\sup\{|f(x)|:x\in D,\|x\|\le 1\}.$$

本节例 1 中的算子 I (恒等算子)与 0(零算子)的范数分别为 $\|I\|=1$ 与 $\|0\|=0$. 例 2 中的算子 T 的范数为 $\|T\|=1$. 例 3 中由 $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 定义的算子 $Tx=(Ax^T)^T$ 的范数 $\|T\|$ 满足

$$\max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}\le\|T\|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}.$$

事实上，右边不等式显然成立．为证左边不等式，对任一固定的自然数 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，令 $\xi_j=\overline{a_{ij}}(1\le j\le n)$，那么 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in \mathbf{K}^n$ 满足

$$\|T\|\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}\ge\|Tx\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\xi_j\right|^2}$$
$$\ge\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2.$$

从而 $\|T\|\ge\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}\,(i=1,2,\cdots,n)$.

对于例 4 中的积分算子 T，显然

$$\|T\|\le(b-a).$$

又 $x_0(t)\equiv 1$ 满足 $\|x_0\|_\infty=1$，且

$$\|Tx_0\|_\infty=\max_{a\le t\le b}(t-a)=b-a.$$

可见 $\|T\|=b-a$. 同理可得：例 6 中的线性泛函 f 的范数 $\|f\|=b-a$. 对例 7 中的泛函 $f(x)=\langle x,y\rangle$，由 Schwartz 不等式知

$$|f(x)|=|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|.$$

从而 $\|f\|\le\|y\|$. 于是当 $y=0$ 时有 $f=0$. 从而

$$\|f\|=0=\|y\|.$$

当 $y\ne 0$ 时，令 $x=\dfrac{y}{\|y\|}$，则 $x\in V$ 且 $\|x\|=1$. 从而

$$|f(x)|=\left\langle\frac{y}{\|y\|},y\right\rangle=\frac{1}{\|y\|}\langle y,y\rangle=\|y\|$$

因此，$\|f\|=\|y\|$.

下面再介绍的两个例子.

例 8 在插值理论中，常用拉格朗日(Lagrange)公式来求已知连续函数的近似多项式. 设 $x\in C[a,b]$，在 $[a,b]$ 内任取几个点 $a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$，作多项式

$$l_k(t)=\frac{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)(t_k-t_2)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)}\ (k=1,2,\cdots,n).$$

令

$$y=L_nx:y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t),$$

则 L_n 是 $C[a,b]$ 到自身的有界线性算子且

$$\|L_n\|=\max_{a\le t\le b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|.$$

证明 显然，L_n 是线性的. 又对任一 $x\in C[a,b]$ 有

$$\|L_nx\|_\infty=\max_{a\le t\le b}\left|\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t)\right|\le\max_{a\le t\le b}\sum_{k=1}^{n}|x(t_k)|\cdot|l_k(t)|$$

$$\le\max_{a\le t\le b}|x(t)|\cdot\max_{a\le t\le b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|,$$

可见 $\|L_nx\|_\infty\le\alpha\|x\|_\infty$，其中 $\alpha=\max\limits_{a\le t\le b}\sum\limits_{k=1}^{n}|l_k(t)|$. 因此, L_n 是有界线性算子且 $\|L_n\|\le\alpha$. 另一方面, 由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}|l_k(t)|$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 从而存在 $t_0\in[a,b]$ 使得 $\alpha=\sum\limits_{k=1}^{n}|l_k(t_0)|$. 作连续折线 $x_0\in C[a,b]$ 使得 $\|x_0\|_\infty=1$ 且

$$x_0(t_k)=\operatorname{sgn}l_k(t_0)\,(k=1,2,\cdots,n).$$

则

$$\|L_n\|\ge\|L_nx_0\|_\infty\ge|(L_nx_0)(t_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}l_k(t_0)\cdot\operatorname{sgn}l_k(t_0)\right|=\alpha.$$

故 $\|L_n\|=\alpha$.

例 9　设 $K(s,t)$ 是在 $D=[a,b]\times[a,b]$ 上连续的实值函数，在实连续函数空间 $C[a,b]$ 中定义积分算子：

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(s,t)x(s)ds,$$

则 T 是 $C[a,b]$ 到自身的有界线性算子且

$$\|T\|=\alpha=\max_{a\le t\le b}\int_a^b |K(s,t)|ds.$$

证明　由含参量积分的性质可知：当 $x\in C[a,b]$ 时，我们有 $Tx\in C[a,b]$．显然，T 是线性的．对任意 $x\in C[a,b]$，则

$$\|Tx\|=\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^b K(s,t)x(s)ds\right|\le\alpha\|x\|.$$

因此，T 是有界线性算子且 $\|T\|\le\alpha$．

由于 $\varphi(t)=\int_a^b|K(s,t)|ds$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，从而存在 $t_0\in[a,b]$ 使得 $\alpha=\int_a^b|K(s,t_0)|ds$．构造函数 $z_0(t)=\operatorname{sgn}K(t,t_0)$．易见，$z_0$ 在 $[a,b]$ 上可测且 $|z_0(s)|\le 1$（$\forall s\in[a,b]$）．由鲁金定理知，对每个 $n\in\mathbf{N}$，存在 $x_n\in C[a,b]$ 使得

(i) $|x_n(t)|\le\sup\limits_{a\le t\le b}|z_0(t)|\le 1,\ \forall t\in[a,b]$；

(ii) 存在 $E_n\subset[a,b]$ 使得 $mE_n<\dfrac{1}{2Mn}$，其中 $M=\sup\limits_{(s,t)\in D}|K(s,t)|+1$；

(iii) 当 $t\in[a,b]\setminus E_n$ 时，$x_n(t)=z_0(t)$．

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b K(s,t_0)z_0(s)ds\right| &\le\left|\int_a^b K(s,t_0)x_n(s)ds\right|+\int_a^b|K(s,t_0)|\cdot|z_0(s)-x_n(s)|ds\\ &\le\|Tx_n\|+2M\cdot mE_n\\ &<\|T\|\cdot\|x_n\|+\frac{1}{n}\\ &\le\|T\|+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

又因为 $\alpha=\int_a^b|K(s,t_0)|ds=\int_a^b K(s,t_0)z_0(s)ds$，从而

$$\alpha\le\|T\|+\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$ 得 $\alpha\le\|T\|$．故 $\|T\|=\alpha$．

2.1.3 算子空间与 Banach 代数

前面我们介绍了有界线性算子的概念，并研究了单个算子的基本性质，如：有界性、连续性、有界与连续的关系、范数等. 在许多实际问题与理论研究中，常常需要研究某些算子的共同属性与相互关系. 这就使得我们不仅要研究算子的单个性质，而且要考虑若干算子的整体性质. 研究单个算子的方法常称为算子论方法，研究某些算子的整体性的方法常称为算子代数的方法.

设 X 与 Y 是两个赋范线性空间，记 $B(X,Y)$ 是由 X 到 Y 中的全体有界线性算子之集. 类似于函数的运算，在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 中定义

$$(A+B)x = Ax + Bx, (\alpha A)x = \alpha Ax, \quad \forall x \in X,$$

其中 $A, B \in B(X,Y), \alpha \in \mathbf{K}$，即 X 与 Y 所考虑的共同数域. 易见，$B(X,Y)$ 关于以上运算为 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，且以零算子 $T: x \mapsto 0$ 为零元. 又对 $B(X,Y)$ 中任一元素，即有界线性算子，定义其范数为算子范数. 则

$$\begin{aligned}\| A+B \| &= \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in X}} \|(A+B)x\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in X}} \| Ax+Bx \| \\ &\le \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in X}} \| Ax \| + \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in X}} \| Bx \| \\ &= \| A \| + \| B \|.\end{aligned}$$

又 $\forall \alpha \in \mathbf{K}$，有

$$\| \alpha A \| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in X}} \| \alpha Ax \| = |\alpha| \| A \|.$$

因此，算子范数确为线性空间 $B(X,Y)$ 中的范数，故它为赋范线性空间，称 $B(X,Y)$ 是算子空间. 当 X 与 Y 相同时，记 $B(X,X)$ 为 $B(X)$. 当 $Y = \mathbf{K}$ 时，称算子空间 $B(X,\mathbf{K})$ 为赋范空间 X 的共轭空间或对偶空间，记为 X^*. 关于算子空间与共轭空间的性质有.

定理 2.1.5 当 Y 是 Banach 空间时，算子空间 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间. 特别地，共轭空间 X 恒为 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 为 $B(X,Y)$ 中的任一基本列，则由定义可知：$\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $m > n > N$ 时，有

$$\| T_m - T_n \| < \varepsilon.$$

于是，对任意 $x \in X$，当 $m > n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}\| T_m x - T_n x \| &= \| (T_m - T_n)x \| \\ &\le \| T_m - T_n \| \cdot \| x \| \\ &\le \| x \| \varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\{T_n x\}$ 是 Banach 空间 Y 中的基本列，从而存在 $y \in Y$，使得

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = y .$$

显然，这个 y 由 x 唯一确定．于是,可定义映射 $T: X \to Y$ 如下:

$$Tx = y = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad \forall x \in X .$$

显然，T 是线性的，在不等式

$$\| T_m x - T_n x \| \le \| x \| \varepsilon$$

中，固定 $x \in X$，令 $m \to \infty$ 可得，当 $n > N$ 时，

$$\| (T_n - T)x \| \le \varepsilon \| x \| .$$

由于 $\varepsilon > 0$ 与 x 无关，故

$$\| T_n - T \| \le \varepsilon (n > N) .$$

任取 $n > N$，则由上面可知 $T_n - T \in B(X,Y)$．由于 $B(X,Y)$ 是线性空间，从而

$$T = (T - T_n) + T_n \in B(X,Y) .$$

由不等式

$$\| T_n - T \| \le \varepsilon (n > N)$$

及 $\varepsilon > 0$ 的任意性，知 $T_n \to T (n \to \infty)$．因此 $B(X,Y)$ 是完备的赋范线性空间，即为 Banach 空间．最后，由于数域 $\mathbf{K}$ 是完备的，从而由上面的结论知共轭空间 $X^* = B(X, \mathbf{K})$ 完备．证毕．

类似于函数的复合运算，定义两个算子的乘法(即复合)：对 $A \in B(X,Z)$，$B \in B(Z,Y)$,定义

$$(B \cdot A)x = B(Ax), \quad \forall x \in X .$$

显然，$B \cdot A$ 是 X 到 Y 的线性算子且

$$\| B \cdot A \| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} \| B(Ax) \| \le \| B \| \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} \| Ax \| = \| B \| \| A \| .$$

从而 $B \cdot A$ 是 X 到 Y 的有界线性算子，即 $B \cdot A \in B(X,Y)$，并称 $B \cdot A$ 是 B 与 A 的乘积，简记为 BA．特别地，同一空间上的任何两个算子可以相乘．例如，对任意 $A \in B(X)$，A 的 n 次幂

$$A^n = \overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}^{n个}$$

有意义且 $\| A^n \| \le \| A \|^n \ (n = 1, 2, \cdots)$．由此可见，在空间 $B(X)$ 中不仅有线性运算(加法与数乘)而且还有乘法运算．又如连续函数空间 $C[a,b]$ 与有界数列空间 $l^\infty(\mathbf{K})$ (见习题 1.2.2 题)中也有自然的乘法运算且满足

$$\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty \text{ 与 } \|xy\|_\infty \le \|x\|_\infty \|y\|_\infty,$$

其中 $f,g\in C[a,b], x,y\in l^\infty(\mathbf{K})$．由此我们抽象出以下概念．

定义 2.1.6 设 A 是 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，对于 A 中任意两个元素 x， y 定义了它们的乘积 $x\cdot y\in A$，满足：

(i) 结合律：$\forall x,y,z\in A$，$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$；

(ii) 分配律：$\forall x,y,z\in A$，有

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z，(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z；$$

(iii) $\forall\alpha\in\mathbf{K}$，$\forall x,y\in A$, 有

$$(\alpha x)\cdot y=\alpha(x\cdot y)=x\cdot(\alpha y)；$$

则称 A 是 $\mathbf{K}$ 上的代数．如果 $(A,\|\cdot\|)$ 又是赋范空间且对任意 $x,y\in A$ 有

(iv) $\|x\cdot y\|\le\|x\|\cdot\|y\|$,

则称 A 是一个赋范代数，若 A 为完备的赋范代数，则称 A 为 Banach 代数．

因此 $B(X)$ 是赋范代数，称为 X 上的算子代数．当 X 完备时，$B(X)$ 成为 Banach 代数．一般地 $B(X)$ 是非交换的，即可能存在 $A,B\in B(X)$，使得 $AB\ne BA$．但 $C[a,b]$，$l^\infty(\mathbf{K})$ 都是交换 Banach 代数，即 $\forall x,y\in C[a,b]$ 或 $l^\infty(\mathbf{K})$，我们都有 $x\cdot y=y\cdot x$．

Banach 代数与 Banach 空间一样，是泛函分析研究的重要对象之一，它是所谓“算子代数”理论的基础，这里我们不可能过多地介绍．但为以后的需要，我们证明下面定理．

定理 2.1.7 设 a 是赋范代数 A 中的元素，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a^n\|}=\inf_{n\in\mathbf{N}}\sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

证明 记 $r_a=\inf_{n\in\mathbf{N}}\sqrt[n]{\|a^n\|}$，显然

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a^n\|}\ge r_a.$$

从而，只要证明

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a^n\|}\le r_a$$

即可．由下确界定义知：$\forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbf{N}$ 使得

$$\sqrt[m]{\|a^m\|}<r_a+\varepsilon.$$

对任一 $n\in\mathbf{N},\exists k_n\in\{0,1,2,\cdots\}, l_n\in[0,m)$ 使得 $n=mk_n+l_n$．由不等式

$$\|a^k\|\le\|a\|^k\ (k\in\mathbf{N})$$

知

$$\sqrt[n]{\|a^n\|}=\sqrt[n]{\|a^{mk_n}\cdot a^{l_n}\|}\le\sqrt[n]{\|a^{mk_n}\|}\cdot\sqrt[n]{\|a^{l_n}\|}$$
$$\le(\|a^m\|^{\frac{1}{m}})^{\frac{mk_n}{n}}\|a\|^{\frac{l_n}{n}}$$
$$\le(r_a+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}\|a\|^{\frac{l_n}{n}}$$
$$=(r_a+\varepsilon)^{1-\frac{l_n}{n}}\|a\|^{\frac{l_n}{n}}.$$

当$a=0$时，结论显然成立．当$a\neq 0$时，由$0\le l_n<m$知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a^n\|}\le r_a+\varepsilon .$$

令$\varepsilon\to 0^+$得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a^n\|}\le r_a$．故得

$$r_a=\inf_{n\ge 1}\sqrt[n]{\|a^n\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

注： 上面定理 2.7.1 知r_a称为元素a的谱半径.

习题 2.1

1. 设$T:X\to Y$是有界线性算子．证明T的零空间$\ker(T)$是X的闭子空间，其中

$$\ker(T)=\{x\in X\mid Tx=0\}.$$

2. 设T是从赋范空间X到Y的线性映射，证明：T连续$\Leftrightarrow$ T在X的某一点x_0处连续.

3. 设f是赋范空间X上的线性泛函，则f连续当且仅当$\ker(f)$是X中的闭子空间.

4. 设$D:C^1[a,b]\to C[a,b]$ 是微分算子：$(Dx)(t)=x'(t)$，证明：D的零空间$\ker(D)$是$C^1[a,b]$的闭子空间，但D不连续，这说明了题中的结论对一般线性算子不成立.

5. 设T是实连续函数空间$C[a,b]$上的正线性算子， 即T是线性的且对任意$f\ge 0$都有$Tf\ge 0$，其中$f\ge 0$是指$f(t)\ge 0$ $(a\le t\le b)$．证明

(i) $\forall f,g\in C[a,b]$，$f\le g\Rightarrow Tf\le Tg$；

(ii) $\forall f\in C[a,b]$，$t\in[a,b]$，有$|(Tf)(t)|\le\|f\|_\infty(T1)(t)$，
其中 1 是$[a,b]$上恒为 1 的函数；

(iii) T是有界线性算子.

6. 设$A,B\in B(X)$，定义$\delta_A,\delta_{A,B}:B(X)\to B(X)$为

$$\delta_A T = TA - AT\text{，}\ \delta_{A,B}T = ATB\text{，}\ \forall T \in B(X).$$

证明

(i) δ_A，$\delta_{A,B}$ 都是有界线性算子且

$$\|\delta_A\| \le 2\|A\|\text{，}\|\delta_{A,B}\| \le \|A\| \cdot \|B\|\text{；}$$

(ii) $\forall S, T \in B(X)$，$\delta_A(ST) = S(\delta_A T) + (\delta_A S)T$；

(iii) $\|\delta_A - \delta_B\| \le 2\|A - B\|$；

(iv) $\delta_A + \delta_B = \delta_{A+B}$，$\delta_{\lambda A} = \lambda\delta_A, (\lambda \in \mathbf{K})$；

(v) 对任意 $A \in B(X)$，定义 $\pi A = \delta_A$，证明 π 是由 $B(X)$ 到 $B(B(X))$ 的有界线性算子.

7．设 T 是从有限维赋范空间 V 到任一赋范空间 Y 的线性算子．应用定理 1.2.2 证明：T 必然连续.

8．在 $l^p(\mathbf{K})$ 中定义算子列 $\{T_n\}$ 如下：

$$T_n(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) = (x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k} \cdots), (n \in \mathbf{N}).$$

证明:

(i) $\forall n \in \mathbf{N}$，$T_n : l^p(\mathbf{K}) \to l^p(\mathbf{K})$ 是有界线性算子且 $\|T_n\| \le 1$；

(ii) $\forall x \in l^p(\mathbf{K})$，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = 0$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - 0\| \ne 0$.

9．设 X 为 Banach 空间，$\{a_n\}$ 为一数列，对任一算子 $T \in B(X)$，作 $B(X)$ 中的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n + \cdots.$$

记 $\rho = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$，称为这个幂级数的收敛半径．证明：

(i) 当 $\|T\| < \rho$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ 以 B(X) 中的范数收敛于某个 $S \in B(X)$；

(ii) 当 $r_T = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$ 收敛．记 $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$，则

$$(I - T)S = S(I - T) = I.$$

提示：应用习题 1.2.6 及正项级数收敛的根式判别法.

10．设 A 是赋范代数，$a, b \in A$ 可换，即 $ab = ba$，试证:

(1) $r_{ab} \le r_a r_b$；

(2) 对任一$x\in A$，$r_x \le \| x \|$.

11．设A是赋范代数，$\forall x_n, y_n, x, y \in A(n=1,2\cdots)$，证明:

$$x_n \to x, y_n \to y(n\to\infty) \Rightarrow x_n y_n \to xy(n\to\infty).$$

这说明: A中的乘法自动连续.

§2.2 Hahn-Banach 延拓定理

§2.1 中引入了赋范空间X的共轭空间X^*，它是X上所有有界线性泛函的全体，恒为 Banach 空间．那么自然要问X^*中是否只有零泛函呢？即当空间$X\ne\{0\}$时，X上是否存在非零有界线性泛函．这是本节讨论的主要问题．

2.2.1 线性泛函的延拓

设X是非平凡（即X中有非零元）的赋范空间，考虑X上是否存在"足够多"的有界线性泛函．设$x_0\in X, x_0\ne 0$，记$X_0=\{\lambda x_0 \mid \lambda\in \mathbf{K}\}$是由$x_0$张成的一维子空间．定义$f_0: X_0\to\mathbf{K}$如下:

$$f_0(\lambda x_0)=\lambda\ (\lambda\in\mathbf{K}),$$

易见f_0是赋范空间X_0上的线性泛函且

$$|f_0(\lambda x_0)|=|\lambda|=\frac{1}{\|x_0\|}\|\lambda x_0\|\ (\lambda\in\mathbf{K}).$$

可见f_0是有界线性泛函且$\|f_0\|=\dfrac{1}{\|x_0\|}$．显然$f_0\ne 0$，但$f_0$仅定义在$X$的子空间$X_0$上，是否能将$f_0$延拓到整个$X$上且保持范数不变呢？如果可以，则得到$X$上的非零有界线性泛函．因此问题转化为:

若f是赋范空间X的子空间Z上的非零有界线性泛函，问是否存在X上的有界线性泛函$\tilde{f}$，使得$\tilde{f}$是f的保范延拓，即

1° $\forall x\in Z$，$\tilde{f}(x)=f(x)$；

2° $\|\tilde{f}\|=\|f\|_z$，$\|f\|_z$是$f: Z\to\mathbf{K}$的范数；

若这样的$\tilde{f}$确存在，则$\forall x\in Z$有

$$|f(x)|\le\|f\|_z\|x\|,\quad |\tilde{f}(x)|=|f(x)|\le\|f\|_z\|x\|.$$

这说明泛函f与$\tilde{f}$均被泛函$p(x)=\|f\|_z\|x\|$控制．显然p满足条件:

3° $p(\alpha x)=|\alpha|p(x), \alpha\in\mathbf{K}, x\in X$；

4° $p(x+y)\le p(x)+p(y), \forall x,y\in X$.

满足条件3°与4°的泛函 $p: X\to \mathbf{R}$ 称次线性泛函，这样问题又可化为下面一般问题：

若 f 是线性空间 X 的子空间 Z 上定义的线性泛函，p 是 X 上的次线性泛函满足：$\forall x\in Z$ 有 $|f(x)|\le p(x)$. 问是否存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$ ，使得当 $x\in Z$ 时有 $|\tilde{f}(x)|\le p(x)$.

为了简单，先看数域 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 的情况. 这时，

$$|f(x)|\le p(x)(x\in Z)\Leftrightarrow f(x)\le p(x),$$

而且

$$-f(x)\le p(x)(\forall x\in Z)\Leftrightarrow f(x)\le p(x)(\forall x\in Z).$$

同理

$$|\tilde{f}(x)|\le p(x)(\forall x\in X)\Leftrightarrow \tilde{f}(x)\le p(x)(\forall x\in X).$$

下面的定理肯定回答了以上的问题.

定理 2.2.1 设 X 是实的线性空间，f 是 X 的子空间 Z 上定义的实线性泛函. 如果存在 X 上的次线性泛函 p 使得任意 $x\in Z$ 有 $f(x)\le p(x)$，则存在 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}$ 使得

(i) 当 $x\in Z$ 时，$\tilde{f}(x)=f(x)$，即 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓；

(ii) 当 $x\in X$ 时，$\tilde{f}(x)\le p(x)$，即 $\tilde{f}$ 仍被 p 控制.

证明 若 $Z=X$,则取 $\tilde{f}=f$ 即可.若 $Z\ne X$,则存在 $x_0\in X$ 但 $x_0\notin Z$. 记 Y 是由 x_0 与 Z 生成的子空间：

$$Y=\{x+tx_0 \mid x\in Z, t\in \mathbf{R}\}.$$

易见 Y 中任一元 y 有唯一的表示：$y=x+tx_0$，$x\in Z$，$t\in\mathbf{R}$. 先将 f 延拓到 Y 上得 Y 上的线性泛函 g，使它仍被 p 控制. 如果这样 g 已找到，则 $\forall y=x+tx_0\in Y$,有

$$g(y)=g(x)+tg(x_0)=f(x)+tg(x_0). \tag{2.2.1}$$

可见，为了确定 g 在 y 的值，只要确定 $g(x_0)$，使得 $\forall y\in Y$ 都有 $g(y)\le p(y)$，即 $\forall x\in Z$ 及 $t\in\mathbf{R}$,有

$$f(x)+tg(x_0)\le p(x+tx_0). \tag{2.2.2}$$

当 $t>0$ 时，不等式(2.2.2)相当于

$$g(x_0) \le \frac{1}{t}[p(x+tx_0)-f(x)],$$
$$= p\left(\frac{x}{t}+x_0\right)-f\left(\frac{x}{t}\right), \quad \forall x \in Z,$$

所以

$$g(x_0) \le p(x'+x_0)-f(x'), \forall x' \in Z .$$

当$t<0$时，(2.2.2)相当于

$$g(x_0) \ge \frac{1}{t}[p(x+tx_0)-f(x)]$$
$$= -p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right)+f\left(-\frac{x}{t}\right), \forall x \in Z,$$

即

$$g(x_0) \ge -p(x''-x_0)+f(x''), \forall x'' \in Z .$$

可见,不等式(2.2.2)等价于：$\forall x', x'' \in Z$ 有

$$-p(x''-x_0)+f(x'') \le g(x_0) \le p(x'+x_0)-f(x') . \tag{2.2.3}$$

因此,存在满足条件(2.2.3)的实数 $g(x_0)$ 等价于：

$$-p(x''-x_0)+f(x'') \le p(x'+x_0)-f(x') .$$

即$\forall x', x'' \in Z$ 有

$$f(x'')+f(x') \le p(x''-x_0)+p(x'+x_0) . \tag{2.2.4}$$

由于$\forall x', x'' \in Z$ 有

$$f(x'')+f(x') = f(x''+x') \le p(x''+x') \le p(x''-x_0)+p(x_0+x'),$$

从而不等式(2.2.4)成立. 这样,对给定的 $y = x + x_0 t \in Y$，只要取满足不等式(2.2.3)的任一实数 $g(x_0)$，定义

$$g(y) = f(x)+tg(x_0) .$$

则 g 是 Y 上的实线性泛函且当 $y \in Z$ 时即 $y = y + 0 \cdot x_0$ 时,有 $g(y) = f(y)$.由以上讨论可知

$$g(y) \le p(y) (\forall y \in Y).$$

如果 $Y = X$，则定理得证. 否则再取 $x_1 \in X$ 但 $x_1 \notin Y$，记 Y_1 是由 x_1 与 Y 生成的子空间. 由前面的证明可知存在 Y_1 上的实线性泛函 g_1 使得当 $x \in Y$ 时有 $g_1(x) = g(x)$ 且当 $y \in Y_1$ 时有 $g_1(y) \le p(y)$. 如果 $Y_1 = X$，则定理得证. 否则,

如此继续下去，最后总能将 f 延拓成 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}$ 使定理中的条件(i)与(ii)满足.

注：事实上，上面最后一段的论述是不严格的，因为 X 中除了 Z 之外可以有不可数个元，延拓可能要做“不可数次”. 因此,不能使用通常的数学归纳法完成. 为了把这种无限次延拓的可能性确切表达出来，需要使用半序集理论中的 Zorn 引理. 为了不增加过多的预备知识，我们将在附录中介绍半序集及 Zorn 引理，并完成以上定理的严格论证.

当数域为复数域 $\mathbf{C}$ 时，有下面的定理.

定理 2.2.2 设 X 是复线性空间，f 是定义在 X 的子空间 Z 上的复线性泛函. 如果存在 X 上的次线性泛函 p，使得 $\forall x\in Z$，$|f(x)|\le p(x)$，则存在 X 上的复线性泛函 $\tilde{f}$ 使得：

(i) 当 $x\in Z$ 时，$\tilde{f}(x)=f(x)$ (即 $\tilde{f}$ 为 f 的延拓)；

(ii) 当 $x\in X$ 时，$|\tilde{f}(x)|\le p(x)$ (即 $\tilde{f}$ 仍被 p 控制).

证明 设法化成实的情况，用定理 2.2.1 之结论. 类似于复数可表成

$$a+ib(a,b\in\mathbf{R})$$

的形式，复线性泛函 f 可表示成：

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),\quad \forall x\in Z,$$

其中

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+\overline{f(x)}\right],\ f_2(x)=\frac{1}{2i}\left[f(x)-\overline{f(x)}\right]$$

分别为复数 $f(x)$ 的实部与虚部. 若 X 与 Z 均为实的线性空间. 易见, f_1 与 f_2 都是 Z 上的实线性泛函且

$$f_1(x)\le|f_1(x)|=|\operatorname{Re}f(x)|\le|f(x)|\le p(x),\forall x\in Z.$$

于是,根据定理 2.2.1 知:存在实空间 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}_1$，使得当 $x\in Z$ 时，有 $\tilde{f}_1(x)=f_1(x)$；当 $x\in X$ 时，$\tilde{f}_1(x)\le p(x)$. 又因 $\forall x\in Z$ 有

$$i[f_1(x)+if_2(x)]=if(x)=f(ix)=f_1(ix)+if_2(ix)$$

比较实部得知：当 $x\in Z$ 时，$f_2(x)=-f_1(ix)$. 从而

$$f(x)=f_1(x)-if_1(ix),\quad \forall x\in Z.$$

令 $\tilde{f}(x)=\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)$，$\forall x\in X$. 显然，当 $x\in Z$ 时，

$$\tilde{f}(x)=f_1(x)-if_1(ix)=f(x).$$

可见 $\tilde{f}$ 满足条件(i). 由于 $\tilde{f}_1$ 是可加的，从而 $\tilde{f}$ 可加. 由于 $\tilde{f}_1$ 是实线性的，从而 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$ 有 $\tilde{f}(\alpha x)=\alpha\tilde{f}(x)$ $(x\in X)$. 又因为对于任意 $x\in X$ 有

$$\tilde{f}(ix)=\tilde{f}_1(ix)-i\tilde{f}_1(x)=i[\tilde{f}_1(x)-i\tilde{f}_1(ix)]=i\tilde{f}(x),$$

所以,对任一复数 $\alpha+i\beta$ 有

$$\tilde{f}((\alpha+i\beta)x)=\tilde{f}(\alpha x)+\tilde{f}(i\beta x)=(\alpha+i\beta)\tilde{f}(x),$$

因此 $\tilde{f}$ 是 X 上的复线性泛函且满足(i). 最后证明 $\tilde{f}$ 也满足条件(ii). 任取 $x\in X$，当 $\tilde{f}(x)=0$ 时，显然有

$$|\tilde{f}(x)|=0\le p(x).$$

当 $\tilde{f}(x)\ne 0$ 时，记 θ 为复数 $\tilde{f}(x)$ 的幅角，则

$$\tilde{f}(x)=e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|.$$

从而

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(x)|&=e^{-i\theta}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(e^{-i\theta}x)=\tilde{f}_1(e^{-i\theta}x)\\&\le p(e^{-i\theta}x)=|e^{-i\theta}|p(x)=p(x).\end{aligned}$$

故 $\tilde{f}$ 也满足条件(ii). 证毕.

以上两个定理均讨论线性空间（不要求赋范）中的线性泛函的“保控延拓”问题. 应用它们立即可得赋范空间中有界线性泛函的“保范延拓”定理.

定理 2.2.4 (哈恩—巴拿赫 Hahn-Banach)设 X 是赋范空间，f 是定义在 X 的子空间 Z 上的有界线性泛函，$\|f\|_Z$ 是 f 的范数:

$$\|f\|_Z=\sup\{|f(x)|: x\in Z, \|x\|=1\},$$

则存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$ 使得

(i) 当 $x\in Z$ 时，$\tilde{f}(x)=f(x)$ (即 $\tilde{f}$ 为 f 的延拓);

(ii) $\|\tilde{f}\|=\|f\|_Z$ (即保持范数).

证明 由于对任意 $x\in Z$ 都有 $|f(x)|\le\|f\|_Z\|x\|$. 于是,令 $p(x)=\|f\|_Z\|x\|$, 则 p 为 X 上的次线性泛函且 $\forall x\in Z$ 有 $|f(x)|\le p(x)$. 由于当 X 是实线性空间时,

$$|f(x)|\le p(x)(\forall x\in Z)\Leftrightarrow f(x)\le p(x)(\forall x\in Z),$$

从而由定理 2.2.2 与定理 2.2.3 知：存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$，使得

$$|\tilde{f}(x)|\le p(x)\ (\forall x\in X)$$

且当 $x\in Z$ 时, 有 $\tilde{f}(x)=f(x)$. 下证 $\tilde{f}$ 有界. 其实,

$$|\tilde{f}(x)|\le p(x)\ (\forall x\in X),$$

即 $|\tilde{f}(x)|\le\|f\|_Z\|x\|\ (\forall x\in X)$. 因此, $\tilde{f}$ 是 X 上的一个有界线性泛函且满足条

件$\|\tilde{f}\|\le\|f\|_Z$. 又显然$\|f\|_Z=\|\tilde{f}\|_Z\le\|\tilde{f}\|$. 故$\|\tilde{f}\|=\|f\|_Z$. 证毕.

2.2.2 有界线性泛函的存在性

有了 Hahn-Banach 定理，就可以解决本节开始提出的问题.

设X是非零赋范空间，$x_0\in X\setminus\{0\}$. 记

$$Z=\{\lambda x_0 \mid \lambda\in\mathbf{K}\},$$

且在Z上定义

$$f_1(\lambda x_0)=\lambda\|x_0\|,\quad \lambda\in\mathbf{K}.$$

则f_1为线性子空间Z上的一个有界线性泛函且$\|f_1\|_Z=1$. 由 Hahn-Banach 延拓定理知f_1可以保范延拓成X上的有界线性泛函f. 显然$f\ne0$且$f(x_0)=\|x_0\|,\|f\|=1$. 这样便证明了非平凡赋范空间确实存在“足够多”的非零有界线性泛函. 从而有以下定理.

定理 2.2.5 设x_0为赋范空间X中的非零元，则存在X上的非零有界线性泛函f使得

(i) $f(x_0)=\|x_0\|$;

(ii) $\|f\|=1$.

应用这个定理可证下面一些重要的结果.

定理 2.2.6 设X为赋范空间且$x_0\in X$，则

$$x_0=0\Leftrightarrow \forall f\in X \text{ 有 } f(x_0)=0.$$

证明 反证法，应用定理 2.2.5.

定理 2.2.7 设G是赋范空间X的子空间，且$x_0\in X$使得$\rho(x_0,G)>0$，则存在X上的有界线性泛函f满足条件:

(i) $f(G)=\{0\}$;

(ii) $f(x_0)=\rho(x_0,G)$;

(iii) $\|f\|=1$.

证明 考虑由G与x_0生成的子空间

$$Z=\{x+tx_0 \mid x\in G, t\in\mathbf{K}\}.$$

由$\rho(x_0,G)>0$，可知$x_0\notin G$. 因此,可以验证:Z中任意元素z有唯一的表示$z=x+tx_0$，其中$x\in G,t\in\mathbf{K}$. 我们在Z上定义$g:Z\to\mathbf{K}$如下:

$$g(x+tx_0)=t\rho(x_0,G), x\in G, t\in\mathbf{K}.$$

因此，g为Z上的线性泛函且满足条件(i)与(ii). 又因为,对于任意$z=x+tx_0\in Z$

有$(t \neq 0)$

$$\| z \| = \| x + tx_0 \| = |t| \left\| x_0 - \frac{-x}{t} \right\| \geq |t| \rho(x_0, G) = |g(z)|$$

当$t=0$时，$z = x \in G$，从而$|g(z)| = 0 \leq \| z \|$. 因此，$\forall z \in Z$有$|g(z)| \leq \| z \|$. 故$\| g \|_Z \leq 1$. 由 Hahn-Banach 定理知存在X上的有界线性泛函f，使得f为g的保范延拓，即$\forall x \in Z$

$$f(x) = g(x) \text{ 且 } \| f \| = \| g \|_Z ,$$

显然f满足(i)和(ii). 另一方面，由$\rho(x_0, G)$的定义知：存在点列$x_n \in G (n = 1, 2, \cdots)$使得

$$\| x_n - x_0 \| \to \rho(x_0, G) (n \to \infty) .$$

由于$f : X \to \mathbf{K}$连续，从而当$n \to \infty$时，有

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_0 - x_n) = | f(x_0 - x_n) | \\ &\leq \| f \| \| x_n - x_0 \| \to \| f \| \rho(x_0, G) \end{aligned}$$

又$f(x_0) = g(x_0) = \rho(x_0, G)$. 从而得到

$$\rho(x_0, G) \leq \| f \| \cdot \rho(x_0, G) .$$

由于$\rho(x_0, g) > 0$，于是得$\| f \| \geq 1$. 又$\| f \| = \| g \|_Z \leq 1$，故$\| f \| = 1$. 说明$f$也满足条件(iii). 证毕.

习题 2.2

1. 设G是赋范线性空间X的子空间，则

$$x_0 \in \overline{G} \Leftrightarrow \rho(x_0, G) = 0 \Leftrightarrow \forall f \in X^*$$

只要$f(G) = \{0\}$，就有$f(x_0) = 0$.

2. 设X是赋范空间，则

(i) $\forall x_0 \in X$，有

$$\| x_0 \| = \sup\{ | f(x_0) | : f \in X^* \text{ 且 } \| f \| = 1 \} ;$$

(ii) $\forall x, y \in X$，有$x = y \Leftrightarrow \forall f \in X^*, f(x) = f(y)$.

3. 在$\mathbf{R}^2$中定义如下的范数：

$$\| (x_1, x_2) \| = | x_1 | + | x_2 |, \forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 .$$

令$G = \{ (x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R} \}$，$\alpha \in \mathbf{R}$ $(|\alpha| \leq 1)$，定义

$$f(x) = x_1, \forall x = (x_1, 0) \in G ; \tilde{f}_\alpha(x) = x_1 + \alpha x_2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 .$$

试证：

(i) f 为 G 上的有界线性泛函且 $\| f \|_G = 1$；

(ii) $\tilde{f}_\alpha$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界线性泛函且 $\| \tilde{f}_\alpha \| = \| f \|_G$；

(iii) 当 $x \in G$ 时，$\tilde{f}_\alpha(x) = f(x)$.

此时说明：同一泛函的保范延拓可有无限多个.

4. 设 X 为赋范空间，Y 为 Banach 空间. 如果 T 是定义 X 的稠密子空间 D 上、值域包含在 Y 中的有界线性算子，证明：存在唯一的有界线性算子 $\tilde{T}: X \to Y$ 使得

(i) 当 $x \in D$ 时，$\tilde{T}x = Tx$（即 $\tilde{T}$ 为 T 的延拓），

(ii) $\| \tilde{T} \| = \| T \|_D = \sup\{\| Tx \| : x \in D$ 且 $\| x \| = 1\}$（即保范）.

§2.3 有界线性泛函的表示

在§2.2 中，我们应用 Hahn-Banach 延拓定理证明了任一非平凡的赋范空间上都有"足够多"的非零有界线性泛函. 本节将讨论某些具体空间上的有界线性泛函.

2.3.1 n 维空间 $\mathbf{K}^n$ 上的有界线性泛函

设

$$e_1 = (1,0,\cdots,0),\ e_2 = (0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n = (0,0,\cdots,0,1)$$

是 $\mathbf{K}^n$ 的标准基底，则任一向量 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \in \mathbf{K}^n$ 都有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k .$$

如果 f 是 $\mathbf{K}^n$ 上任一线性泛函，则

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k),\quad \forall x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in \mathbf{K}^n .$$

从而

$$| f(x) | \le \sum_{k=1}^n | \xi_k | \cdot | f(e_k) | \le \left(\sum_{k=1}^n | f(e_k) |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n | \xi_k |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| y \| \| x \|,$$

其中 $y = (f(e_1), f(e_2),\cdots,f(e_n)) \in \mathbf{K}^n$. 于是，$f$ 是有界线性泛函且满足 $\| f \| \le \| y \|$. 取 $\xi_k = \overline{f(e_k)} (k = 1,2,\cdots,n)$，则 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \in \mathbf{K}^n$ 满足

$$f(x) = \sum_{k=1}^n | f(e_k) |^2 = \| y \|^2 .$$

又因为

$$\|y\|^2 = f(x) \le \|f\| \cdot \|x\| = \|f\| \cdot \|y\|,$$

所以 $\|f\| \ge \|y\|$．因此 $\|f\| = \|y\|$．

反之，对任一 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{K}^n$，定义

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{K}^n.$$

则用类似的方法可以证明 f 是 $\mathbf{K}^n$ 上的有界线性泛函数，且 $\|f\| = \|y\|$．

由以上讨论可得：

定理 2.3.1 $f \in (\mathbf{K}^n)^*$ 当且仅当存在唯一的 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{K}^n$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{K}^n, \tag{2.3.1}$$

且 $\|f\| = \|y\|$．

定义 $\pi : (\mathbf{K}^n)^* \to \mathbf{K}^n$ 如下：

$$\pi f = y,$$

其中 $f \in (\mathbf{K}^n)^*, y \in \mathbf{K}^n$ 满足(2.3.1)．容易验证 π 是线性映射且 $\|\pi f\| = \|f\|$，$\forall f \in (\mathbf{K}^n)^*$．这说明：$\pi$ 是等距的线性同构．在这种意义下，将 $\mathbf{K}^n$ 上的线性泛函与其中的元素不加区别，即视 $(\mathbf{K}^n)^* = \mathbf{K}^n$．

2.3.2 $l^p(\mathbf{K})$ $(1 < p < \infty)$ 上的有界线性泛函

设

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \cdots),$$
$$\cdots,$$
$$e_n = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{n个}, 1, 0, \cdots),$$
$$\cdots$$

则对任一 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) \in l^p(\mathbf{K})$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ 收敛．于是

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \to 0 (n \to \infty).$$

可见，$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ 收敛于 x，即 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$.

如果 f 是 $l^p(\mathbf{K})$ 上的有界线性泛函，则由 f 的连续性可知:

$$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p(\mathbf{K}),\ f(x)=f\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k)$$

成立. 令 $\eta_k=f(e_k)(k=1,2,\cdots), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，则

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k, \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p(\mathbf{K}) . \tag{2.3.2}$$

对任一固定的 n，令 $x_n=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)},0,0,\cdots)$，其中

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\eta_k|^q\eta_k^{-1}, & \text{当}\eta_k\neq 0\\ 0, & \text{当}\eta_k=0\end{cases}\quad(1\le k\le n),\quad q=\frac{p}{p-1} .$$

显然 $x_n\in l^p(\mathbf{K})$，$|f(x_n)|=\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q$ 且

$$|f(x_n)|\le\|f\|\cdot\|x_n\|_p=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

由 $\xi_k^{(n)}$ 的定义知

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} .$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\le\|f\|\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} .$$

因此，$\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|$. 从而，得到

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\| .$$

可见，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^q(\mathbf{K})$ 且 $\|y\|_q\le\|f\|$. 再用 Holder 不等式(习题 1.1.1)可证 $\|f\|\le\|y\|_q$. 因此，$y\in l^q(\mathbf{K})$ 除了满足表示式(2.3.2)外，还有 $\|y\|_q=\|f\|$.

反之，对任一 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^q(\mathbf{K})$，定义

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k,\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p(\mathbf{K}). \tag{2.3.3}$$

应用 Hölder 不等式可知 $f(x)$ 有限，且

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k||\eta_k|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|y\|_q\|x\|_p.$$

因此，f 是 $l^p(\mathbf{K})$ 上的有界线性泛函且 $\|f\|\le\|y\|_q$．由于 f 有表示式（2.3.2），及上面的推导可知 $\|y\|_q\le\|f\|$．故(2.3.3)式定义了唯一的 $f\in(l^p(\mathbf{K}))^*$ 且 $\|f\|=\|y\|_q$．

总结上面的讨论，有

定理 2.3.2 $f\in(l^p(\mathbf{K}))^*\Leftrightarrow$ 存在唯一的 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^q(\mathbf{K})$ 使得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k,\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p(\mathbf{K})$$

且 $\|y\|_q=\|f\|$，其中 $1<p<\infty$．

定义 $\pi:(l^p(\mathbf{K}))^*\to l^q(\mathbf{K})$ 如下：$\pi f=y$，其中 y 是 f 所对应的唯一元素，则 $\forall f\in(l^p(\mathbf{K}))^*$ 有 $\|\pi f\|_q=\|f\|$．于是，π 是等距的线性同构，此时，将 $l^p(\mathbf{K})$ 上的有界线性泛函 f 可看作 $l^q(\mathbf{K})$ 中的元素 πf．从而

$$(l^p(\mathbf{K}))^*=l^q(\mathbf{K}).$$

类似可证：$(l^1(\mathbf{K}))^*=l^\infty(\mathbf{K})$（习题 2.3.3），但值得注意的是：$(l^\infty(\mathbf{K}))^*\ne l^1(\mathbf{K})$．

2.3.3 $L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$ 上的有界线性泛函

定理 2.3.3 $f\in(L^p[a,b])^*\Leftrightarrow$ 存在唯一的 $y\in L^q[a,b]$ 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt,\quad \forall x\in L^p[a,b] \tag{2.3.4}$$

且 $\|f\|=\|y\|_q$，其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$．

证明 $(\Leftarrow)$ 设 $y\in L^q[a,b]$，令 $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt$，则 $\forall x\in L^p[a,b]$，由 Hölder 不等式知

$$|f(x)|\le\int_a^b|x(t)|\cdot|y(t)|dt\le\|y\|_q\cdot\|x\|_p$$

从而，f 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函且 $\|f\| \le \|y\|_q$.

($\Rightarrow$) 设 f 为 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函，以下寻找满足要求的 $y \in L^q[a,b]$.
若 $y \in L^q[a,b]$ 使得(2.3.4)成立，则对

$$X_s(t) = \begin{cases} 1, a \le t \le s; \\ 0, s < t \le b, \end{cases}$$

有

$$f(X_s) = \int_a^b X_s(t)y(t)dt = \int_a^s y(t)dt .$$

从而 $y(t) = \dfrac{d}{ds} f(X_s), a.e.$于$[a,b]$. 这样，只要如此定义 y，再证明它满足要求即可.

设函数 X_s 如上定义，则显然 $X_s \in L^p[a,b]$.令 $g(s) = f(X_s)$，下证 g 在 $[a,b]$ 上绝对连续. 对 $[a,b]$ 中任意 n 个没有公共同内点的闭区间

$$\delta_j = [s_j, t_j](1 \le j \le n),$$

记 $\varepsilon_j = \operatorname{sgn}[g(t_j) - g(s_j)]$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} | g(t_j) - g(s_j) | &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [g(t_j) - g(s_j)] \\
&= f\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [X_{t_j} - X_{s_j}] \right) \\
&\le \| f \| \cdot \| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [X_{t_j} - X_{s_j}] \|_p \\
&= \| f \| \left\{ \int_a^b | \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j [X_{t_j}(\tau) - X_{s_j}(\tau)] |^p \, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\le \| f \| \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{\delta_j} d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} = \| f \| \left\{ \sum_{j=1}^{n} m\delta_j \right\}^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

由此可见:函数 g 在 $[a,b]$ 上绝对连续，从而几乎处处可导. 令 $y(s) = g'(s)$，则 $y \in L[a,b]$. 由于 $X_a = 0$，即 $X_a(t) = 0$， $a.e.$于 $[a,b]$，从而

$$f(X_s) = \int_a^s y(\tau)d\tau = \int_a^b X_s(\tau)y(\tau)d\tau . \tag{2.3.5}$$

对 $X_{[s,t]}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in[s,t]\\ 0, & \tau\notin[s,t]\end{cases}$ 有 $X_{[s,t]}=X_t-X_s$. 从而由(2.3.5)知

$$f(X_{[s,t]})=\int_a^b X_{[s,t]}(\tau)y(\tau)d\tau,\ \forall a\le s\le t\le b. \tag{2.3.6}$$

于是，对任意阶梯函数 $x(\tau)=\sum_{i=1}^{n}c_iX_{[t_{i-1},t_i]}(\tau)$（其中 c_i 为常数），由(2.3.6)知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_if(X_{[t_{i-1},t_i]})=\int_a^b x(\tau)y(\tau)d\tau. \tag{2.3.7}$$

设 x 为 $[a,b]$ 上的任一有界可测函数，应用鲁金定理可以找到 $[a,b]$ 上一列阶梯函数 $\{x_n\}$ 使得 $x_n(t)\to x(t)$，$a.e.$ 于 $[a,b]$ 且

$$|x_n(t)|\le\sup_{a\le t\le b}|x(t)|<\infty.$$

由（2.3.7）得知

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)d\tau(n=1,2,\cdots).$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理可得：当 $n\to\infty$ 时，有

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)d\tau\to\int_a^b x(\tau)y(\tau)d\tau,$$

$$\|x_n-x\|_p=\left(\int_a^b|x_n(\tau)-x(\tau)|^p\,d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\to 0.$$

再由 f 的连续性知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\int_a^b x(\tau)y(\tau)d\tau. \tag{2.3.8}$$

为证(2.3.8)式对任一 $x\in L^p[a,b]$ 成立，先证以上找到的 $y\in L^q[a,b]$. 作

$$x_n(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\operatorname{sgn}y(t), & |y(t)|\le n;\\ 0, & |y(t)|>n,\end{cases}$$

则 x_n 为有界可测函数.由(2.3.8)可知

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)dt=\int_{E_n}|y(t)|^q\,dt\ (n=1,2,\cdots),$$

其中

$$E_n=\{t\in[a,b]:|y(t)|\le n\}.$$

显然，E_n 可测且 $E_n\subset E_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$. 由 Levi 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b \chi_{E_n}(t)\,|\,y(t)\,|^q\,dt=\int_a^b |\,y(t)\,|^q\,dt\,. \tag{2.3.9}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}|\,f(x_n)\,|&\le\|\,f\,\|\cdot\|\,x_n\,\|_p\\&=\|\,f\,\|\left\{\int_a^b |\,x_n(t)\,|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\\&=\|\,f\,\|\left[\int_{E_n}|\,y(t)\,|^q\,dt\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

由（2.3.9）式知

$$\int_a^b |\,y(t)\,|^q\,dt\le\|\,f\,\|\left(\int_a^b |\,y(t)\,|^q\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

从而，

$$\left(\int_a^b |\,y(t)\,|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_a^b |\,y(t)\,|^q\,dt\right)^{1-\frac{1}{p}}\le\|\,f\,\|<\infty\,.$$

因此，$y\in L^q[a,b]$ 且 $\|\,y\,\|_q\le\|\,f\,\|$.

最后证(2.3.4)式对一切 $x\in L^p[a,b]$ 成立．我们任取 $x\in L^p[a,b]$，作有界可测函数如下：令

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t), & |\,x(t)\,|\le n,\\ n, & |\,x(t)\,|>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,t\in[a,b],$$

则 $|\,x_n(t)\,|\le|\,x(t)\,|$ 且 $|\,x_n(t)\,|\le n\ (a\le t\le b)(n=1,2,\cdots)$．由控制收敛定理知

$$\|\,x_n-x\,\|_p=\left(\int_a^b |\,x_n(t)-x(t)\,|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\to 0(n\to\infty)\,.$$

由(2.3.8)及 f 的连续性及控制收敛定理知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)y(t)dt=\int_a^b x(t)y(t)dt\,.$$

因此，(2.3.4)式对一切 $x\in L^p[a,b]$ 成立．再由 Hölder 不等式可知 $\|\,y\,\|_q\ge\|\,f\,\|$，从而 $\|\,f\,\|=\|\,y\,\|_q$．证毕．

定义

$$\pi:(L^p[a,b])^*\to L^q[a,b]$$

为 $\pi f=y$，其中 y 是由(2.3.4)确定的 $L^q[a,b]$ 中元素，则

$$\|\pi f\|_q = \|f\|, \quad \forall f \in (L^p[a,b])^*.$$

因此，π 是等距线性同构．视 f 与 $\pi f = y$ 相同，则有

$$(L^p[a,b])^* = L^q[a,b].$$

用类似的方法可证:

$$(L^1[a,b])^* = L^\infty[a,b],$$

但 $(L^\infty[a,b])^* \neq L^1[a,b]$．

2.3.4 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函

应用与 2.3.3 中类似的思想可以证明

定理 2.3.4 $f \in (C[a,b])^*$ 当且仅当存在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 $v(t)$，使得

$$f(x) = \int_a^b x(t)dv(t), \forall x \in C[a,b]，且 \|f\| = \overset{b}{\underset{a}{V}}(v),$$

其中积分为 Riemann—Stieltjes 积分，$\overset{b}{\underset{a}{V}}(v)$ 是 v 的全变差.

由于本定理的证明要用到 $R-S$ 积分的某些性质，故从略.

2.3.5 Hilbert 空间上有界线性泛函的表示

定理 2.3.5 (F. Riesz) 设 H 为 Hilbert 空间，则 $f \in H^*$ 当且仅当存在唯一 $y \in H$ 使得

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H，且 \|f\| = \|y\|. \tag{2.3.10}$$

证明 ($\Leftarrow$) 任取 $y \in H$，令 $f(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$．由内积的性质知 f 为 H 上的线性泛函．又由 Schwartz 不等式知

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x \in H.$$

因此，f 为 H 上的有界线性泛函且 $\|f\| \leq \|y\|$.

($\Rightarrow$) 设 $f \in H^*$，以下寻找 $y \in H$ 使得(2.3.10)式成立．如果 $f = 0$，则取 $y = 0$ 就满足要求．如果 $f \neq 0$，令

$$M = \{x \in H \mid f(x) = 0\} = \ker(f)$$

是 f 的零空间．显然 M 是 H 的真闭子空间(因为 $f \neq 0$ 且 f 连续)．于是存在 $x_0 \in H$ 使得 $x_0 \perp M$．因此 $x_0 \notin M$，故 $f(x_0) \neq 0$．记 $\delta = f(x_0)$，则对于任意 $x \in H$ 有

$$f(\delta x - f(x)x_0) = \delta f(x) - f(x)f(x_0) = 0.$$

于是 $\delta x - f(x)x_0 \in M$，从而 $\langle \delta x - f(x)x_0, x_0 \rangle = 0$，所以

$$f(x)=\frac{\delta}{\|x_0\|^2}\langle x,x_0\rangle,\forall x\in H.$$

令 $y=\dfrac{\delta}{\|x_0\|^2}x_0$，得到

$$f(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H.$$

又若存在 $y'\in H$ 使得

$$f(x)=\langle x,y'\rangle,\quad \forall x\in H,$$

则 $\langle x,y-y'\rangle=0$，$\forall x\in H$，故 $y'=y$．可见，满足条件的 y 是唯一的，由上面充分性的证明知:$\|f\|\le\|y\|$．又因为

$$\|f\|\cdot\|y\|\ge f(y)=\langle y,y\rangle=\|y\|^2$$

从而 $\|f\|\ge\|y\|$，故 $\|f\|=\|y\|$．证毕.

定义 $\pi:H^*\to H$ 如下：$\pi f=y$，其中 y 是 $f\in H^*$ 由定理 2.3.5 中的方式对应唯一的 H 中元，即满足

$$f(x)=<x,y>,\quad \forall x\in H.$$

又若 $\pi g=z$，则 $\pi(f+g)=y+z$，因为 $\forall x\in H$ 有

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\&=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle\\&=\langle x,y+z\rangle.\end{aligned}$$

又因

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=\alpha\langle x,y\rangle=\langle x,\overline{\alpha}y\rangle(\forall x\in H),$$

可见，$\pi(\alpha f)=\overline{\alpha}f$．于是，$\pi:H^*\to H$ 是共轭线性同构,即 π 为一一对应且

$$\pi(f+g)=\pi f+\pi g,\pi(\alpha f)=\overline{\alpha}f,$$

且保范（即 $\|\pi f\|=\|f\|$）．在这样的对应下，视 $f\in H^*$ 与 πf 相同，从而 $H^*=H$．定理 2.3.5 通常称为 Riesz 表示定理.

习题 2.3

1．设 $x\in L^p[a,b]$，试证：

$$x(t)=0,\quad a.e.\text{于}[a,b]\Leftrightarrow\forall y\in L^q[a,b]\text{有}\int_a^b x(t)y(t)dt=0,$$

其中$1<p,q<\infty$满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

2. 设f是 Hilbert 空间H的子空间Z上定义的有界线性泛函，证明：存在唯一的$\tilde{f}\in H^*$使得

(i) 当$x\in Z$时，$\tilde{f}(x)=f(x)$(即$\tilde{f}$为f的延拓)；

(ii) $\|\tilde{f}\|=\|f\|_Z$.

提示：应用 Hahn-Banach 延拓定理与 Riesz 表示定理.

3. 求出空间$C(\mathbf{K})$与$l^1(\mathbf{K})$上有界线性泛函的一般形式，并证明：$(l^1(\mathbf{K}))^*=l^\infty(\mathbf{K})$(空间$C(\mathbf{K})$如习题 1.2.1 所述).

4. 设X是n维赋范线性空间，求出X上有界线性泛函的一般形式，并证明：X上任一线性泛函自动连续.

提示：选取X的一组基，考虑与 1.3.1 中类似的表示.

5. 证明：$(L^1[a,b])^*=L^\infty[a,b]$.

§2.4　共轭空间与共轭算子

2.4.1 共轭空间

前面引入了赋范线性空间X的共轭空间X^*. 由于X^*本身又是一个赋范线性空间，从而它也有自己的共轭空间$(X^*)^*$. 记$X^{**}=(X^*)^*$，称为原空间X的二次共轭空间. 类似地可定义X^{***}等. 于是，对任给的赋范空间X，可得一列空间：

$$X,X^*,X^{**},X^{***},\cdots,\tag{2.4.1}$$

它们之间必有某种联系.

先讨论X与X^{**}的关系. 对每个点$x\in X$与每个泛函$f\in X^*$，可得一数$f(x)$. 如果固定f让x取遍X，就得到X上的有界线性泛函f. 如果固定x，让f取遍X^*，则得到X^*上的一个泛函，记为x^{**}，则

$$x^{**}(f)=f(x),\quad \forall f\in X^*.\tag{2.4.2}$$

由于对任意的$f,g\in X^*$及$\alpha\in\mathbf{K}$有

$$x^{**}(\alpha f)=(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)=\alpha\cdot x^{**}(f)=(\alpha\cdot x^{**})(f)$$

与

$$x^{**}(f+g)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^{**}(f)+x^{**}(g).$$

可见，x^{**}是X^*上的线性泛函. 显然

$$|x^{**}(f)|=|f(x)|\le\|f\|\|x\|,\quad \forall f\in X^*.$$

因此，x^{**} 是 X^* 上的一个有界线性泛函，从而 $x^{**}\in X^{**}$ 且有 $\|x^{**}\|\le\|x\|$. 如果 $x=0$ 则 $x^{**}=0$，从而 $\|x^{**}\|=\|x\|$. 如果 $x\ne 0$，则由定理 2.2.5 知：存在 $f\in X^*$ 使得 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|x\|$，即 $x^{**}(f)=\|x\|$. 因此 $\|x^{**}\|=\|x\|$. 进一步, 对任意的 $x,y\in X$ 及 $f\in X^*$ 有

$$\begin{aligned}(x+y)^{**}(f)&=f(x+y)=f(x)+f(y)\\&=x^{**}(f)+y^{**}(f)\\&=(x^{**}+y^{**})(f).\end{aligned}$$

从而 $(x+y)^{**}=x^{**}+y^{**}$. 同理可证：对任意 $\alpha\in\mathbf{K}$，我们有 $(\alpha x)^{**}=\alpha x^{**}$. 这表明：$J_X:x\mapsto x^{**}$ 是 X 到 X^{**} 中的线性映射且

$$\|J_X x\|=\|x^{**}\|=\|x\|(\forall x\in X).$$

因此, J_X 是 X 到 X^{**} 中的等距线性映射(称为空间 X 的典型嵌入映射), 从而是一对一的. 总结以上讨论可得

定理 2.4.1 设 X 是赋范线性空间，对每个 $x\in X$ 定义

$$x^{**}(f)=f(x),\quad \forall f\in X^*,$$

则 $x^{**}\in X^{**}$ 且 $\|x^{**}\|=\|x\|$. 又若定义 $J_X x=x^{**}$ ($\forall x\in X$)，则 $J_X:X\to X^{**}$ 是等距的线性映射，且 J_X 是一对一的.

在这个定理的意义下，视 x 与 x^{**} 相同，从而可视 X 为 X^{**} 的子空间，即 $X\subset X^{**}$，如果 $X=X^{**}$，即

$$X^{**}=J_X(X)=\{x^{**}\mid x\in X\},$$

则称 X 是自反的. 显然，自反空间必完备.

在§2.3 中我们证明了当 $1<p<\infty$ 时,有

$$(l^p(\mathbf{K}))^*=l^q(\mathbf{K}) 与 (L^p[a,b])^*=L^q[a,b],$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 于是可得

$$(l^p(\mathbf{K}))^{**}=(l^q(\mathbf{K}))^*=l^p(\mathbf{K})$$

与

$$(L^p[a,b])^{**}=(L^q[a,b])^*=L^p[a,b].$$

因此, 空间 $l^p(\mathbf{K})$ 与 $L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$ 都是自反 Banach 空间.

由上面的关系也可看出：当 $p=2$ 时，有 $q=2$，因此

$$(l^2(\mathbf{K}))^* = l^2(\mathbf{K}),\ (L^2[a,b])^* = L^2[a,b].$$

一般地，若赋范线性空间 $X = X^*$，则称 X 是自共轭的．又如空间 $\mathbf{K}^n$ 及任意 Hilbert 空间 H 都是自共轭的．显然，自共轭空间必自反．

上面讨论的是空间列(2.4.1)中空间 X 与空间 X^{**} 的关系．一般地可得

$$\begin{cases} X \subset X^{**} \subset X^{****} \subset \cdots; \\ X^* \subset X^{***} \subset X^{*****} \subset, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

其中"$\subset$"表示等距嵌入．这是(2.4.1)中相间的两个空间的大小关系．下面讨论相邻两个空间的属性关系．只要讨论 X 与 X^* 的关系即可．

定理 2.4.2 设 X 是赋范空间，则当 X^* 可分时，X 也可分．

证明 设 D 是 X^* 中的可数稠密集，则 $\overline{D} = X^*$．记

$$S = \{f \in X^* : \| f \| = 1\},\ D_1 = \{f \in D : \| f \| \geq \frac{1}{2}\}.$$

容易验证 D_1 在 S 中稠密．记 $D_1 = \{f_n \mid n \in \mathbf{N}\}$，则对每个 n 存在 $x_n \in X$ 使得 $\| x_n \| = 1$ 且 $| f_n(x_n) | \geq \frac{1}{3}$ (由 $\| f_n \|$ 的定义知)．设

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbf{K}\right\},\ Y = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in \mathbf{K}_0\right\},$$

其中 $\mathbf{K}$ 为 X 的数域，且

$$\mathbf{K}_0 = \begin{cases} \mathbf{Q}, & \mathbf{K} = \mathbf{R} \\ \mathbf{Q} + i\mathbf{Q}, & \mathbf{K} = \mathbf{C} \end{cases},\ \mathbf{Q} + i\mathbf{Q} = \{p + iq \mid p, q \in \mathbf{Q}\}.$$

易见，X_0 是 X 的线性子空间且 Y 在 X_0 中稠，即 $\overline{Y} \supset X_0$．从而 $\overline{Y} \supset \overline{X}_0$．由于 $\mathbf{K}_0$ 可数，所以 Y 是可数集．下证 Y 在 X 中稠．只要证 X_0 在 X 中稠，即 $\overline{X}_0 = X$．否则，若 $\overline{X}_0$ 是 X 的真闭子空间，则由定理 2.2.7 知：存在 $f \in X^*$，使得 $f(\overline{X}_0) = \{0\}$，且 $\| f \| = 1$．于是 $\forall n \in \mathbf{N}$ 有

$$\| f_n - f \| \geq | f_n(x_n) - f(x_n) | = | f_n(x_n) | \geq \frac{1}{3}.$$

可见 $B\left(f, \frac{1}{3}\right) \cap D_1 = \varnothing$，但 $f \in S$．这与 D_1 在 S 中稠密矛盾．故 X 有可数稠子集 Y，因而 X 可分．证毕．

由定理 2.4.2 可知：$L^1[a,b]$ 不自反．事实上，若不然，则由关系

$$L^\infty[a,b] = (L^1[a,b])^* \text{ (习题 2.3.5)}$$

知

$$(L^\infty[a,b])^* = (L^1[a,b])^{**} = L^1[a,b].$$

由习题 2.1.3 知 $L^1[a,b]$ 可分，从而 $(L^\infty[a,b])^*$ 可分. 根据定理 2.4.2 知 $L^\infty[a,b]$ 可分. 于是, 它有可数稠子集 D. 令

$$x_{[a,s]}(t) = \begin{cases} 1, & a \le t \le s \\ 0, & s < t \le b \end{cases},$$

则 $x_{[a,s]} \in L^\infty[a,b]$ $(a < s < b)$ 且当 $a < s' < s'' < b$ 时，有

$$\| x_{[a,b]} - x_{[a,s'']} \|_\infty = 1.$$

记 $D = \{x_1, x_2, \cdots\}$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(x_i, \frac{1}{3}\right) \supset L^\infty[a,b] \supset \{x_{[a,s]} : a < s < b\}.$$

由于 $x_{[a,s]}(a < s < b)$ 有不可数个，从而必有某个球 $B\left(x_i, \frac{1}{3}\right)$ 包含两个不同的 $x_{[a,s']}$ 与 $x_{[a,s'']}$，这是不可能. 因此, $L^\infty[a,b]$ 不可分，进而知 $L^1[a,b]$ 不自反并且也证明了:

$$(L^\infty[a,b])^* \ne L^1[a,b].$$

关于自反性,我们有以下结论.

定理 2.4.3 设 X 为完备的赋范线性空间，则 X 自反当且仅当 X^* 自反.

证明 $(\Rightarrow)$ 设 X 自反，则 $X^{**} = X$ 即

$$X^{**} = J_X(X) = \{x^{**} \mid x \in X\}, \tag{2.4.4}$$

其中 $x^{**}(f) = f(x)$，$\forall f \in X$ 及 $x \in X$. 下证 $X^{***} = X^*$ 即

$$\{g^{**} \mid g \in X^*\} = (X^*)^{**} = X^{***}. \tag{2.4.5}$$

任取 $f \in X^{***}$，定义

$$g(x) = f(x^{**}),\quad \forall x \in X,$$

则 $g \in X^*$ 且 $\forall x \in X$,有

$$g^{**}(x^{**}) = x^{**}(g) = g(x) = f(x^{**}).$$

因此,由(2.4.4)知 $f = g^{**}$，可见 $f \in \{g^{**} \mid g \in X^*\}$. 又因为

$$\{g^{**} \mid g \in X^*\} \subset X^{***},$$

从而（2.4.5）式成立. 故 X^* 自反.

$(\Leftarrow)$ 设 X^* 自反，则 $(X^*)^{**} = X^*$ 即（2.4.5）成立. 为证 X 自反，只要证明

（2.4.4）式成立．记

$$\hat{X}=J_X(X)=\{x^{**}\mid x\in X\},$$

则 $\hat{X}\subset X^{**}$．由于 $J_X:x\mapsto x^{**}$ 是完备空间 X 到赋范空间 $\hat{X}$ 的等距同构，从而 $\hat{X}$ 也完备．因此，$\hat{X}$ 是 X^{**} 中的闭子空间（应用习题 1.1.8）．如果 $\hat{X}\neq X^{**}$，则存在 $h\in X^{**}$ 但 $h\notin\hat{X}$．由于 $\hat{X}$ 是闭子集，则 $\rho(h,\hat{X})>0$（应用习题 1.1.3）．根据定理 2.2.7 知：存在 $f\in(X^{**})^*=X^{***}$，使得 $f(\hat{X})=\{0\}$ 但 $f\neq 0$．由于(2.4.5)式成立．故存在 $g\in X^*$ 使得 $g^{**}=f$，于是 $\forall x\in X$，有 $g^{**}(x^{**})=0$ 即 $g(x)=x^{**}(g)=0$，因而 $g=0$．可见 $f=g^{**}=0$，这与 $f\neq 0$ 矛盾．故 $\hat{X}=X^{**}$ 即（2.4.4）式成立．证毕．

2.4.2　共轭算子

设 $T:X\to Y$ 是有界线性算子，对每个 $g\in Y^*$ 定义

$$f(x)=g(Tx),\quad \forall x\in X. \tag{2.4.6}$$

显然，$f\in X^*$．再定义

$$T^*g=f,\quad \forall g\in Y^*,$$

其中 f 由(2.4.6)式定义．于是，得到一个映射

$$T^*:Y^*\to X^*,$$

它满足：

$$(T^*g)(x)=g(Tx),\quad \forall g\in Y^*,\ \forall x\in X. \tag{2.4.7}$$

有时,将上式记为:

$$\langle x,T^*g\rangle=\langle Tx,g\rangle,\quad \forall g\in Y^*,\ \forall x\in X.$$

定义 2.4.4　设 $T\in B(X,Y)$，则称由(2.4.7)式所确定的映射

$$T^*:Y^*\to X^*$$

为算子 T 的共轭算子,或伴随算子．

定理 2.4.4　共轭算子有下面的性质：

1° $T^*:Y^*\to X^*$ 是有界线性算子且 $\|T^*\|=\|T\|$；

2° $\forall\alpha\in\mathbf{K}$，$(\alpha T)^*=\alpha T^*$；

3° $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$，这里 $T_i\in B(X,Y)$；

4° $(T_2T_1)^*=T_1^*T_2^*$，这里 $T_1\in B(X,Y)$，$T_2\in B(Y,Z)$；

5° $\|(T^*)^*\|=\|T\|$.

证明 1° 先证$T^*:Y^*\to X^*$是线性的．$\forall f,g\in Y^*$，$\forall x\in X$，由(2.4.7)得

$$\begin{aligned}[T^*(f+g)](x)&=(f+g)(Tx)=f(Tx)+g(Tx)\\&=(T^*f)(x)+(T^*g)(x)\\&=(T^*f+T^*g)(x).\end{aligned}$$

从而$T^*(f+g)=T^*f+T^*g$．可见，T^*是可加的，类似可证T^*是齐次的．下证T^*有界．由(2.4.7)知: 对每个$f\in Y^*$及$\forall x\in X$有

$$|(T^*f)(x)|=|f(Tx)|\le\|f\|\cdot\|Tx\|\le\|f\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|,$$

从而$\|T^*f\|\le\|T\|\cdot\|f\|$．故$T^*$是有界线性算子且$\|T^*\|\le\|T\|$．另一方面，对任一$x\in X$，由定理 2.2.5 知：存在$f_0\in Y^*$，使得

$$f_0(Tx)=\|Tx\|\text{ 且 }\|f_0\|=1.$$

于是

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=|f_0(Tx)|=|(T^*f_0)(x)|\le\|T^*f_0\|\cdot\|x\|\\&\le\|T^*\|\cdot\|f_0\|\cdot\|x\|=\|T^*\|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

因此，$\|T\|\le\|T^*\|$．故$\|T^*\|=\|T\|$．

性质$2^\circ-4^\circ$直接验证即可，留作练习．下证性质5°．由性质1°知

$$\|(T^*)^*\|=\|T^*\|\text{ 及 }\|T^*\|=\|T\|,$$

从而$\|(T^*)^*\|=\|T\|$．证毕.

记$T^{**}=(T^*)^*$，并称为算子T的二次共轭算子.

在某些情况下，常常需要求出共轭算子的具体形式，现举两例以说明其方法.

例 1 设$A=[a_{ij}]$是$m\times n$实距阵，定义$T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$如下：

$$Tx=(Ax^T)^T=xA^T,$$

其中x^T是行向量x的转置，视为$n\times1$矩阵．若记$Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，则

$$\eta_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

容易验证: T是有界线性算子．由于$(\mathbf{R}^m)^*=\mathbf{R}^m$，$(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$，从而$T^*$是$\mathbf{R}^m$到$\mathbf{R}^n$的有界线性算子.

对任一$f\in(\mathbf{R}^m)^*=\mathbf{R}^m$，记$f=(c_1,c_2,\cdots,c_m)$,则

$$f(y)=\sum_{i=1}^{m}c_i\eta_i\text{，}\quad \forall y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\in\mathbf{R}^m .$$

于是,$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$ 有

$$(T^*f)(x)=f(Tx)=\sum_{i=1}^{m}c_i\eta_i=\sum_{i=1}^{m}c_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i)\xi_j .$$

将 i,j 交换得

$$(T^*f)(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}c_j\right)\xi_i=\sum_{i=1}^{n}d_i\xi_i\text{，}$$

其中 $d_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}c_i\ (i=1,2,\cdots,n)$．因此，

$$T^*f=(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

这就证明了:

$$T^*f=\left(A^Tf^T\right)^T=fA^T\ (\forall f\in(\mathbf{R}^m)^*=\mathbf{R}^m).$$

可见，$T^*:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 由矩阵 A 的转置阵 A^T 定义.

例 2　设 $k(t,s)$ 是 $D=[a,b]\times[a,b]$ 上的可测实值函数满足：

$$\iint_D|k(t,s)|^q\,dtds<\infty,\tag{2.4.8}$$

其中 $1<q<\infty$，积分是 Lebesgue 积分．定义

$$(Tx)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds,\forall x\in L^p[a,b],\tag{2.4.9}$$

其中 $p=\dfrac{q}{q-1}$．由 Hölder 不等式得：$\forall t\in[a,b]$，有

$$|(Tx)(t)|\le\left(\int_a^b|k(t,s)|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|x(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

从而 $(Tx)(t)$ 有限且

$$|(Tx)(t)|^q\le\left(\int_a^b|k(t,s)|^q\,ds\right)\cdot\|x\|_p^q\text{，}\quad\forall a\le t\le b .$$

因此，

$$\|Tx\|_q=\left(\int_a^b|(Tx)(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\le\alpha\|x\|_p\text{，}$$

其中$\alpha=\left(\iint\limits_D |k(t,s)|^q\,dtds\right)^{\frac{1}{q}}$.由（2.4.8）知$\alpha<\infty$,可见$Tx\in L^q[a,b]$. 因此，$T$是从$L^p[a,b]$到$L^q[a,b]$中的映射. 显然，$T$是线性的，从而$T$是有界线性算子且$\|T\|\le\alpha$. 由于$L^p[a,b]$与$L^q[a,b]$互为共轭空间，从而$T^*$是从$(L^q[a,b])^*=L^p[a,b]$到$(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$中的有界线性算子. 由§2.3 知，$\forall f\in(L^q[a,b])^*$，存在唯一$y\in L^p[a,b]$使得对任何$z\in L^q[a,b]$有

$$f(z)=\int_a^b z(t)y(t)dt.$$

故对任一$x\in L^p[a,b]$有

$$(T^*f)(x)=f(Tx)=\int_a^b y(t)\left[\int_a^b k(t,s)x(s)ds\right]dt$$

$$=\int_a^b x(s)\left[\int_a^b k(t,s)y(t)dt\right]ds \quad \text{（Fubini 定理）}$$

$$=\int_a^b x(t)\left[\int_a^b k(s,t)y(s)ds\right]dt \quad \text{（交换 } s,t\text{）}.$$

于是，依照$(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$的实际含义有

$$(T^*f)(t)=\int_a^b k(s,t)y(s)ds.$$

视$f=y$，则$\forall y\in L^p[a,b]$有

$$(T^*y)(t)=\int_a^b k(s,t)y(s)ds. \tag{2.4.10}$$

这就是共轭算子T^*的表示式，它由函数$k(s,t)$定义.

以上由(2.4.9)与(2.4.10)得到的算子T与T^*都称为积分算子，分别具有积分核$k(s,t)$与$k_1(t,s):=k(s,t)$.

由定理 2.3.5 后的注可知：当H为 Hilbert 空间时，可视$H^*=H$. 从而由$T\in B(H)$可知$T^*\in B(H)$， 有关性质见习题 2.4.13

习题 2.4

1．设X为赋范线性空间，证明：

$$\dim X=n\Leftrightarrow \dim X^*=n.$$

其中dim表示维数，n是自然数.

2．设X为赋范线性空间，证明：

$$\dim X = \infty \Leftrightarrow \dim X^* = \infty .$$

3．设 X 是 Banach 空间，证明：X 自反 $\Leftrightarrow$ X 的某次共轭空间自反.

4．若赋范线性空间 X 的某次共轭空间可分，则 X 可分.

5．举例说明：X 可分 $\not\Rightarrow X^*$ 可分.

6．证明共轭算子的性质 2° 与 3° .

7．求数乘算子 $\alpha I \in B(X)$ 的共轭算子，其中 α 为任一数，I 是恒等算子.

8．证明：有限维赋范空间必自反.

9．设 X 为赋范线性空间，对 X 的每个非空子集 E，定义

$$E^{\perp} = \{f \in X^* \mid f(E) = \{0\}\} .$$

证明:

(i) $E^{\perp}$ 是 X 的闭子空间；

(ii) $(\overline{E})^{\perp} = E^{\perp}$，其中 $\overline{E}$ 为 $E \subset X$ 的闭包；

(iii) $E^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow E$ 在 X 中稠密；

(iv) $E^{\perp} = X^* \Leftrightarrow E = \{0\}$.

10．设 $T \in B(X,Y)$，证明：

(i) $\ker(T^*) = \overline{T(X)}^{\perp}$；

(ii) T^* 是单射 $\Leftrightarrow T$ 具有稠值域.

11．对任一 $A \subset X^*$，定义

$$A^{\circ} = \{x \in X \mid f(x) = 0 (\forall f \in A)\} .$$

证明:

(i) $A^{\circ} = \bigcap_{f \in A} \ker(f)$，从而 A° 为 X 的闭子空间；

(ii) $\overline{A}^{\circ} = A^{\circ}$；

(iii) $A^{\circ} = X \Leftrightarrow A = \{0\}$；

(iv) 当 X 自反时，$A^{\circ} = \{0\} \Leftrightarrow A$ 在 X 中稠密.

12．设 $T \in B(X,Y)$，证明：$\ker(T) = [T^*(Y^*)]^{\circ}$，进而证明：当 X 自反时，T 是单射 $\Leftrightarrow T^*$ 具有稠值域即 $\overline{T^*(Y^*)} = X^*$.

13．设 H 为 Hilbert 空间，视 $H = H^*$，则 $\forall T \in B(H)$ 有

(ii) $\forall x, y \in H$，有

$$< Tx, y > = < x, T^* y >, < T^* x, y > = < x, Ty > ;$$

(ii) $T^{**} = T$，$\forall x, y \in H$，$< T^*Tx, y > = < Tx, Ty >$；

(iii) $\forall x \in H$，$< T^*Tx, x > = \|Tx\|^2$；

(iv) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$.

提示：应用定理 2.3.5.

§2.5 Banach 逆算子定理

2.5.1 逆算子的概念与基本性质

有许多应用与理论问题可归结为求解算子方程$Tx=y$，其中x, y是适当线性空间E,F中的向量，T是E到F的算子. 需要研究的主要问题为:是否对每个y都存在唯一的x满足方程:$Tx=y$(即解的存在性问题).显然,这等价于映射T有逆映射T^{-1},这时解为$x=T^{-1}y$. 由于实际问题的需要，往往要求：当y变化不大时，解x也变化不大，这个相当于要求逆映射T^{-1}是连续的. 因此, 有必要研究一个算子在什么情况下有逆算子且逆算子是连续的.

定义 2.5.1 设$T\in B(X,Y)$ 如果T是一一对应(即既是单射又是满射)，则对每个$y\in Y$，存在唯一$x\in X$使得$Tx=y$,定义

$$T^{-1}y=x. \tag{2.5.1}$$

从而得到一个算子$T^{-1}:Y\to X$,称T^{-1}为T的逆算子.

显然，逆算子也是线性的且仍是一一对应，但不一定是有界的. 一个算子何时才有逆算子呢？

设$T\in B(X,Y)$的逆算子T^{-1}存在，则由逆算子的定义(2.5.1)知，

$$TS=I_Y, ST=I_X, \tag{2.5.2}$$

其中I_X,I_Y分别是X,Y上的恒等算子.

反之，若有线性算子$S:Y\to X$使得

$$TS=I_Y, ST=I_X, \tag{2.5.3}$$

则由(2.5.3)中第一式知T是满射,因为$\forall y\in Y, T(Sy)=y$. 由第二式知T是单射,因为由$Tx=0$可得$STx=x=0$. 因此,T是一一对应，从而逆算子T^{-1}存在，又由(2.5.2)及(2.5.3)知

$$T^{-1}=T^{-1}(TS)=(T^{-1}T)S=S.$$

这表明：满足(2.5.3)的算子S必是T的逆算子. 于是，我们得到

定理 2.5.2 设$T\in B(X,Y)$，则T有逆算子当且仅当存在线性算子$S:Y\to X$使得

$$TS=I_Y, ST=I_X, \tag{2.5.4}$$

此时,$S=T^{-1}$.

由此可证：若$T\in B(X,Y)$与$S\in B(Y,Z)$都有逆算子，则$ST\in B(X,Z)$也

有逆算子且有 $(ST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}$. 利用共轭算子的定义还可以证明:若 $T\in B(X,Y)$ 有逆算子,则 $T^*\in B(Y^*,X^*)$ 也有逆算子且 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

2.5.2 逆算子的有界性

下面讨论一个有界线性算子具有有界逆算子的条件.

定理 2.5.3 设 X 是 Banach 空间，$T\in B(X)$ 且 $\|T\|<1$，则 $I-T$ 有有界逆算子且

(1) $(I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T^n$;

(2) $\|(I-T)^{-1}\|\le(1-\|T\|)^{-1}$.

证明 考虑空间 $B(X)$ 中的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}T^n=I+T+T^2+\cdots+T^n+\cdots. \tag{2.5.5}$$

因为 $\|T^n\|\le\|T\|^n$ 及 $\|T\|<1$，从而可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|T^n\|$ 收敛，于是由定理 2.1.5 及习题 1.2.6 知：级数(2.5.5)收敛．易见

$$\begin{aligned}&(I-T)(I+T+T^2+\cdots+T^n)\\=&(I+T+T^2+\cdots+T^n)(I-T)\\=&I-T^{n+1}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，并注意到 $T^{n+1}\to 0$，由上式可得

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{\infty}T^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}T^n\right)(I-T)=I.$$

于是由定理 2.5.1 知 $(I-T)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T^n$ 且由此可知

$$\|(I-T)^{-1}\|=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}T^n\right\|\le\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n=(1-\|T\|)^{-1}.$$

证毕.

由上面的证明可知：当 $\|T\|<1$ 时,有

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n.$$

这与几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1}(|r|<1)$$

非常类似.

推论 1 如果 X 为 Banach 空间,$T \in B(X)$ 具有有界逆算子,则对于任意 $\Delta T \in B(X)$,当 $\|\Delta T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ 时，算子 $S = T + \Delta T \in B(X)$ 有有界逆算子且

$$S^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1} \cdot \Delta T)^n T^{-1}.$$

证明 因 $S = T(I + T^{-1} \cdot \Delta T)$ 且

$$\|T^{-1} \cdot \Delta T\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|\Delta T\| < 1.$$

由定理 2.5.3 知：$I - (-T^{-1}\Delta T) = I + T^{-1}\Delta T$ 有有界逆算子且

$$(I + T^{-1}\Delta T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^n.$$

因此，S 有有界逆算子且

$$S^{-1} = (I + T^{-1} \cdot \Delta T)^{-1} T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-T^{-1} \cdot \Delta T)^n T^{-1}.$$

证毕.

推论 2 若 X 为 Banach 空间，$T \in B(X)$ 且 $|\lambda| > \|T\|$, 则 $\lambda I - T$ 有有界逆算子.

记

$$G(X) = \{T \in B(X) \mid T\text{有有界的逆算子}\},$$

则由推论 1 可知:当 $T \in G(X)$ 时，以 T 为中心，$\|T^{-1}\|^{-1}$ 为半径的 $B(X)$ 中的球 $B\left(T, \|T^{-1}\|^{-1}\right) \subset G(X)$.这表明 $G(X)$ 是 $B(X)$ 中的一个开集，通常称 $G(X)$ 中的元素为 X 上的可逆算子.

推论 3 若 X 为 Banach 空间，$S,T \in B(X,Y), S$ 具有有界逆算子且

$$\|T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|},$$

则 $S + T$ 有有界逆算子.

为了证明另一重要定理—Banach 逆算子定理，需要下面两个引理.

设 (E, p) 是距离空间，$S \subset E$，如果 $(\overline{S})^\circ = \varnothing$（即 S 的闭包没有内点），则称 S 是 E 中的疏朗集（或无处稠密集）. 如果 E 可以表示成可数个疏朗集之并，

则称 E 是第一纲的，否则称 E 是第二纲的.

引理 1 (Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二纲的.

证明 设 E 是完备距离空间，但它不是第二纲的，于是存在 E 中可数个疏朗集

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

使得 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. 由于 M_n 是疏朗集，所以

$$M_n^{\circ}=(\overline{M}_n)^{\circ}=\varnothing\,(n=1,2,\cdots).$$

$\forall a\in E$，由于 a 不是 $\overline{M_1}$ 的内点,从而有

$$B(a,1)\cap \overline{M_1}^{c}\neq\varnothing.$$

任取 $a_1\in B(a,1)\cap\overline{M_1}^{c}$, 则存在闭球 $\overline{B}(a_1,\delta_1)\subset B(a,1)$ 且

$$\overline{B}(a_1,\delta_1)\cap M_1=\varnothing,$$

可设 $0<\delta_1<1$. 又因 M_2 是疏朗集,从而 a_1 不是 $\overline{M_2}$ 的内点,于是

$$B(a_1,\delta_1)\cap\overline{M}_2^{c}\neq\varnothing.$$

任取 $a_2\in B(a_1,\delta_1)\cap\overline{M_2}^{c}$，则存在闭球

$$\overline{B}(a_2,\delta_2)\subset B(a_1,\delta_1)\subset\overline{B}(a_1,\delta_1)$$

使得 $\overline{B}(a_2,\delta_2)\cap M_2=\varnothing$，可设 $0<\delta_2<\dfrac{1}{2}$. 如此继续，可得到一列闭球：

$$\overline{B}(a_1,\delta_1)\supset\overline{B}(a_2,\delta_2)\supset\cdots\supset\overline{B}(a_n,\delta_n)\supset\cdots.$$

满足条件：

$$0<\delta_n<\frac{1}{n},\ \overline{B}(a_n,\delta_n)\cap M_n=\varnothing\ \ (n=1,2,\cdots).$$

显然 $\delta_n\to 0(n\to\infty)$. 由闭球套定理（习题 1.1.13）知:存在唯一的

$$x_0\in\overline{B}(x_n,\delta_n)(n=1,2,\cdots).$$

于是，$x_0\notin M_n(n=1,2,\cdots)$，但是 $x_0\in E$. 这与 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$ 矛盾，证毕.

引理 2 设 X,Y 是 Banach 空间，T 是从 X 到 Y 上的有界线性算子，则 X 中的开单位球

$$B_0=B(0,1)=\{x\in X:\|x\|<1\}$$

在 T 下的像 $T(B_0)$ 包含一个以零为中心的开球.

证明 分三步完成.

结论(i): 开球 $B_1 = B\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 的像的闭包 $\overline{T(B_1)}$ 含一个开球 B^*.

为证此结论,我们引入记号：设 $A \subset X, w \in X, \lambda \in K$, 定义

$$\lambda A = \{\lambda x | x \in A\}, A + w = \{x + w \mid x \in A\}.$$

由于对任意 $x \in X$，存在自然数 $k > 2\|x\|$，从而 $x \in kB_1$，因此 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$. 于是

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1).$$

由于 Y 是完备的，从而由 Baire 纲定理(引理 1)知：存在 k_0 使 $k_0(TB_1)$ 不是疏朗集，即 $\overline{k_0 T(B_1)}$ 含有一个开球. 因此 $\overline{T(B_1)}$ 也含一个开球 $B^* = B(y_0, \varepsilon)$ (这里用到：当 $\alpha \neq 0$ 时，$\overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$).

结论(ii): 开球 $B_n = B\left(0, \dfrac{1}{2^n}\right)$ 的像的闭包 $\overline{T(B_n)}$ 含有以 $0 \in Y$ 为中心的开球 $B\left(0, \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right)$.

由于 $B^* = B(y_0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)}$，所以

$$B(0, \varepsilon) = B(y_0, \varepsilon) - y_0 \subset \overline{T(B_1)} - y_0.$$

下证 $\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$. 设 $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$， 则 $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$ ，从而存在 $u_n \in T(B_1)(n = 1, 2, \cdots)$，使得 $u_n \to y + y_0 (n \to \infty)$. 又因为 $y_0 \in \overline{T(B_1)}$，于是存在 $v_n \in T(B_1)(n = 1, 2, \cdots)$ 使得 $v_n \to y_0 (n \to \infty)$. 记 $u_n = Tw_n, v_n = Tz_n$, 其中 $w_n, z_n \in B_1(n = 1, 2, \cdots)$, 则

$$Tw_n \to y + y_0, Tz_n \to y_0 (n \to \infty).$$

又由

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

可知 $w_n - z_n \in B_0(n = 1, 2, \cdots)$. 但是

$$T(w_n - z_n) \to y (n \to \infty),$$

因此 $y \in \overline{T(B_0)}$. 这就证明了:

$$\overline{T(B_1)}-y_0\subset\overline{T(B_0)},$$

因而 $B(0,\varepsilon)\subset\overline{T(B_0)}$. 最后，由关系

$$\overline{T(B_n)}=\overline{\frac{1}{2^n}T(B_0)}=\frac{1}{2^n}\overline{T(B_0)}\supset\frac{1}{2^n}B(0,\varepsilon)=B\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

可知 $\overline{T(B_n)}\supset B\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$.

结论(iii): $T(B_0)$ 含以 $0\in Y$ 为中心的开球.

令 $V_n=B\left(0,\frac{\varepsilon}{2^n}\right)(n=1,2,\cdots)$, 下证 $V_1\subset 2T(B_0)$. 任取 $y\in V_1$，设法寻找 $x\in B_0$ 使得 $2Tx=y$. 由结论(ii)知 $V_1\subset\overline{T(B_1)}$，于是 $y\in\overline{T(B_1)}$，因此存在 $x_1\in B_1$ 使得 $\|y-Tx_1\|<\frac{\varepsilon}{4}$, 即 $y-Tx_1\in V_2\subset\overline{T(B_2)}$. 于是, 存在 $x_2\in B_2$ 使得

$$\|y-Tx_1-Tx_2\|<\frac{\varepsilon}{2^3},$$

即 $y-Tx_1-Tx_2\in V_3$. 如此继续，可以找到 $x_n\in B_n$ 使得

$$\left\|y-T\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{2^n},n=1,2,\cdots.$$

由 $x_n\in B_n$ 知 $\|x_n\|<\frac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$. 从而, 应用 X 的完备性及习题 1.2.6(v)知: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 以范数收敛于某个 $x\in X$，即 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n$. 由于

$$\|x\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<2,$$

可见 $x\in 2B_0$. 再由

$$T\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\to Tx,\ T\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\to y(n\to\infty),$$

可知 $y=Tx\in T(2B_0)$. 由 $y\in V_1$ 任意性可知

$$V_1\subset T(2B_0)=2T(B_0),$$

故 $T(B_0)\supset\frac{1}{2}V_1=B\left(0,\frac{\varepsilon}{4}\right)$. 证毕.

定理 2.5.4 (Banach 逆算子定理) 设 X 与 Y 是 Banach 空间，$T\in B(X,Y)$ 是一一对应，则逆算子 $T^{-1}\in B(Y,X)$.

证明 只要证明 $T^{-1}:Y\to X$ 连续即可.由定理 1.1.4 知，只要证明：对任一开集 $A\subset X,(T^{-1})^{-1}(A)=T(A)$ 是 Y 中的开集即可，也就是 T 将开集映为开集. 设 $A\subset X$ 是开集，如果 $A=\varnothing$，则 $T(A)=\varnothing$ 为 Y 中的开集; 如果 $A\neq\varnothing$，则任取 $y\in T(A)$. 于是存在 $x\in A$ 使得 $Tx=y$. 由于 A 是开集，从而存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x,\varepsilon)\subset A$. 于是

$$B(0,\varepsilon)=B(x,\varepsilon)-x\subset A-x.$$

可见

$$T(B(0,1))\subset\varepsilon^{-1}T(A-x)=\varepsilon^{-1}(T(A)-Tx).$$

由引理 2 知: 存在 $\delta>0$ 使得

$$B(0,\delta)\subset T(B(0,1))\subset\varepsilon^{-1}T(A)-\varepsilon^{-1}y.$$

因此 $B(y,\delta\varepsilon)\subset T(A)$，故 $T(A)$ 为开集，从而 T^{-1} 有界. 证毕.

注 以上证明：“$A\subset X$ 为开集 $\Rightarrow T(A)\subset Y$ 是开集”的过程中没有用到 T 是单射，只用到 T 是满射.

一般地，若 T 是从距离空间 E 到距离空间 F 中的映射，且 T 将开集映成开集，则称 T 为开映射. 由以上注可得:

定理 2.5.5 (开映射定理) 若 T 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子，则 T 是开映射.

习题 2.5

1. 设 $T\in B(X,Y)$ 有有界的逆算子,证明 T^* 也有有界的逆算子且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*.$$

2. 设 $\{T_n\}$ 为 Banach 空间 X 上的一列有界线性算子且 $T_n\to T(n\to\infty)$（依算子范数)，证明：如果 T 有有界逆算子，则当 n 充大时，T_n 都有有界的逆算子.

3. 设线性空间 X 上有两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 且 X 关于这两个范数都是 Banach 空间，证明：若存在常数 $c_1>0$ 使得 $\forall x\in X,\|x\|_1\le c_1\|x\|_2$，则必存在常数 $c_2>0$ 使得 $\|x_2\|\le c_2\|x\|_1,\forall x\in X$.

提示：证明恒等算子 $I:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 有界，再用 Banach 逆算子定理.

4. 设 X 是 Banach 空间，$T\in B(X)$ 满足

$$r_T=\lim_{n\to\infty}(\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}<1,$$

证明：$I-T$ 有有界的逆算子，且 $(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n$.

5．设 X 是 Banach 空间，则 $\forall T\in B(X)$，存在数 $r>0$，使的当 $\lambda\in K$ 满足 $|\lambda|>r$ 时，$\lambda I-T$ 有有界逆算子.

6．设 X 是 Banach 空间,$T_0\in B(X)$ 且当 $\|T-T_0\|<r$ 时,T 有有界逆算子，又定义映射

$$f:D=\{T\in B(X):\|T-T_0\|<r\}\to B(X)$$

为 $f(T)=T^{-1}(\forall T\in D)$，证明 f 是连续的.

提示：证明如果 $T_2,T_1\in D$, 则 $T_1^{-1}-T_2^{-1}=T_1^{-1}(T_2-T_1)T_2^{-1}$.

7．证明定理 2.5.3 的推论 2 及推论 3.

§2.6 闭图像定理与一致有界原理

2.6.1 闭算子与闭图像定理

一元函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的图像是平面上的一条曲线 L，它由平面上所有点 $(x,f(x))(x\in D)$ 组成,即

$$L=\{(x,f(x)\mid x\in D\}.$$

类似地，我们也可定义线性算子的图像.

设 X 与 Y 是同一数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范空间，定义它们的乘积空间(也称直和空间)为:

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

其中线性运算按坐标定义，范数为 $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$．容易验证: $X\times Y$ 成为数域 $\mathbf{K}$ 的赋范空间.

定义 2.6.1 设 $T:D\to Y$ 为线性算子，其中 D 是 X 的子空间，则称 $X\times Y$ 中的点集

$$G_T=\{(x,Tx)\mid x\in D\}$$

为线性算子 T 的图像．如果 G_T 是闭子空间，则称 T 为闭算子.

易见,线性算子的图像 G_T 恒为子空间.因此,$T:D\to Y$ 是闭算子当且仅当 G_T 是闭集当且仅当对任意 $x_n\in D(n=1,2,\cdots)$,只要 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y$,就有 $x\in D$ 且 $Tx=y$.

下面讨论一个算子的闭性与有界性有何关系.

若 $T:D\to Y$ 是有界线性算子，则 $\forall x_n\in D(n=1,2,\cdots)$ 只要

$$x_n \to x, Tx_n \to y(n \to \infty),$$

就有 $x \in \overline{D}$. 于是, 如果 D 又是 X 的闭子空间，则必有 $x \in D$.进而，由 T 在 x 连续知 $Tx_n \to Tx(n \to \infty)$，因此 $Tx = y$，故 T 是闭算子.

由以上讨论我们得到:

定理 2.6.2 设 X, Y 为赋范空间, D 是 X 的线性子空间, $T: D \to Y$ 是线性算子，则

(i) T 是闭算子 $\Leftrightarrow \forall x_n \in D(n=1,2,\cdots)$，只要 $x_n \to x, Tx_n \to y(n \to \infty)$，就有 $x \in D$ 且 $Tx = y$.

(ii) 如果 T 是有界线性算子且定义域 D 是闭的,则 T 是闭算子.

那么，闭算子是否一定有界呢?

例 1 考察微分算子

$$T: C^1[a,b] \to C[a,b], \quad (Tx)(t) = x'(t).$$

视 $C^1[a,b]$ 为 $C[a,b]$ 的子空间，在§2.1 中已经知道 T 是无界算子.下面,我们证明 T 是闭算子. 为此, 设

$$x_n \in C^1[a,b](n=1,2,\cdots), x_n \to x, Tx_n \to y(n \to \infty),$$

即在区间 $[a,b]$ 上,有

$$x_n(t) \xrightarrow{u} x(t),\ x_n'(t) \xrightarrow{u} y(t)(n \to \infty),$$

其中 $\xrightarrow{u}$ 表示一致收敛. 由数学分析中的定理可知 $x \in C^1[a,b]$ 且 $Tx = y$.故由定理 2.6.2 知: T 是闭算子.

此例说明：闭算子不一定有界. 但是,当定义城与值域空间都完备时,闭算子必有界,即有下面定理.

定理 2.6.3(闭图像定理) 设 X, Y 都是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是闭算子,则 T 必有界.

证明 易见，$X \times Y$ 也是 Banach 空间. 由于 T 是闭算子，从而其图像 G_T 是 Banach 空间 $X \times Y$ 的闭子空间，因此 G_T 本身也是 Banach 空间. 现定义算子 $\overline{T}: G_T \to X$ 如下：$\overline{T}(x, Tx) = x, \forall x \in X$. 显然，$\overline{T}$ 是从 Banach 空间 G_T 到 Banach 空间 X 上的一对一的线性算子. 由于

$$\forall x \in X, \|\overline{T}(x,Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|,$$

因此，$\overline{T}$ 是有界线性算子. 应用 Banach 逆算子定理(定理 2.5.4)知 $\overline{T}^{-1}$ 有界，从而

$$\|(x,Tx)\| = \|\overline{T}^{-1}x\| \le \|\overline{T}^{-1}\| \cdot \|x\| (\forall x \in X) .$$

可见,

$$\|Tx\| \le \|(x,Tx)\| \le \|\overline{T}^{-1}\| \cdot \|x\| (\forall x \in X).$$

故 T 有界且 $\|T\|\le\|\overline{T}^{-1}\|$.证毕.

闭图像定理不仅指出了闭算子与有界算子的深刻联系,而且也给出了判别线性算子有界性的一个重要方法.

2.6.2　一致有界原理及其应用

设 $T_\alpha\in \mathrm{B}(X,Y)(\alpha\in I)$ 是一族有界线性算子，如果存在常数 $M>0$ 使得

$$\|T_\alpha\|\le M(\forall\alpha\in I),$$

则称 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 一致有界．此时，对每个 $x\in X$ 有

$$\|T_\alpha x\|\le\|T_\alpha\|\cdot\|x\|\le M\cdot\|x\|(\forall\alpha\in I).$$

可见,对每个 $x\in X$，$\{T_\alpha x\}_{\alpha\in I}$ 是 Y 中的有界集(此时,称 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 逐点有界). 反之对吗？即

$$\forall x\in X,\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|<\infty\Rightarrow\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|<\infty$$

是否成立？下面的定理回答了这个问题.

定理 2.6.4(一致有界原理) 设 $T_\alpha\in B(X,Y)(\alpha\in I)$ 且 X 完备．如果 $\forall x\in X$，$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|<\infty$，则 $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|<+\infty$.

证明 令 $P(x)=\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|$ $(\forall x\in X)$，则 P 是 X 上的次线性泛函且

$$P(x)\ge 0,P(-x)=P(x)\,(x\in X).$$

因为对任何 $k>0$ 有

$$P(x)\le k\Leftrightarrow\|T_\alpha x\|\le k\ (\forall\alpha\in I),$$

从而

$$M_k:=\{x\in X\mid p(x)\le k\}=\bigcap_{\alpha\in I}\{x\in X:\|T_\alpha x\|\le k\}.$$

又因 T_α 连续，故 $\{x\in X\big|\,\|T_\alpha x\|\le k\}=T_\alpha^{-1}(B(0,k))$ 是闭集. 由此可见，M_k 为闭集 $(k>0)$．易见 $X=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}M_k$．由于 X 完备，故由 Baire 纲定理知:存在 $k_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\left(\overline{M}_{k_0}\right)^\circ\ne\varnothing$. 于是，存在开球 $B(x_0,y_0)\subset\overline{M_{k_0}}=M_{k_0}$．对任一向量 $x\in X\setminus\{0\}$，有

$$x_0\pm\frac{r_0}{2\|x\|}x\in B(x_0,r_0)\subset M_{k_0}.$$

所以 $P\left(x_0\pm\dfrac{r_0}{2\|x\|}x\right)\le k_0$.从而

$$P\left(\frac{r_0}{\|x\|}x\right)=P\left(\frac{r_0}{2\|x\|}x+x_0+\frac{r_0}{2\|x\|}x-x_0\right)$$
$$\le P\left(\frac{r_0}{2\|x\|}x+x_0\right)+P\left(\frac{r_0}{2\|x\|}x-x_0\right)$$
$$\le 2k_0.$$

于是 $P(x)\le\frac{2k_0}{r_0}\|x\|(\forall x\in X)$. 因此

$$\|T_\alpha x\|\le\frac{2k_0}{r_0}\|x\|(\forall x\in X,\forall\alpha\in I).$$

可见 $\|T_\alpha\|\le\frac{2k_0}{r_0}(\forall\alpha\in I)$，所以 $\sup\limits_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|\le\frac{2k_0}{r_0}<\infty$.证毕.

一致有界原理又称共鸣定理,它是由 Banach 与 Steinhaus 共同得到的,在泛函分析及其他方面有着深刻的应用.

例 2 Fourier 级数的发散问题. 设 $C_{2\pi}$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上全体周期为 2π 的连续实值函数之集，在 $C_{2\pi}$ 中定义范数

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<\infty}|x(t)|.$$

容易证明 $C_{2\pi}$ 成为一个 Banach 空间. 在 Fourier 级数的研究中，一个有趣的问题是:是否每个周期为 2π 的连续函数的 Fourier 级数处处收敛呢？下面我们应用共鸣定理给出这一问题的否定回答.

设 $x\in C_{2\pi}$ 的 Fourier 级数是

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

则由数学分析知其前 n 部分和为

$$S_n(x,t)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(s,t)x(s)ds,$$

其中

$$K_n(s,t)=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)(s-t)}{2\pi\sin\frac{1}{2}(s-t)},$$

称为 Dirichlet 核. 令

$$f_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_n(s,0)x(s)ds,\ \forall x\in C_{2\pi},$$

则$\{f_n\}$为$C_{2\pi}$上的一列有界线性泛函且

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(s,0)|ds&=\int_0^{2\pi}|K_n(s,0)|ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right|}{\left|\sin\frac{1}{2}s\right|}ds\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt\\&\geq\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(2n+1)t|}{t}dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du\end{aligned}$$

且$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{\sin u}{u}\right|du=\infty$，所以$\sup\limits_{n\geq 1}\|f_n\|=\infty$. 根据共鸣定理知：存在$x_0\in C_{2\pi}$使得$\sup\limits_{n\geq 1}|f_n(x_0)|=\infty$，即$\sup\limits_{n\geq 1}|S_n(x_0,0)|=\infty$.这说明:$x_0$的 Fourier 级数在$t_0=0$处发散.

实际上，通过精细的论证可知:有“很多很多”的周期为2π的连续函数，它们的 Fourier 级数在“很多很多”点处发散. 这里的“很多”可以用稠密来理解.

习题 2.6

1．设X,Y为赋范线性空间，$T:X\to Y$是线性算子，证明

(i) T是闭算子当且仅当$\forall x_n\in X\,(n=1,2,\cdots)$只要$x_n\to 0$ $Tx_n\to y$，就有$y=0$；

(ii) 若$S:X\to Y$是有界线性算子，则T是闭算子当且仅当$S+T$是闭算子.

2．设X,Y是 Banach 空间，$T:X\to Y$是线性算子，称

$$S(T)=\{y\in Y\mid 存在\{x_n\}\subset X且x_n\to 0使得Tx_n\to y\}$$

为算子T的分离空间，证明:

(i) $S(T)$是Y的闭子空间;

(ii) T连续$\Leftrightarrow S(T)=\{0\}$;

(iii) 如果算子$A\in B(X),B\in B(Y)$且$TA=BT$,则$B(S(T))\subset S(T)$.

3. 设函数f在$[a,b]$上可测且对任一$g\in L^q[a,b]$，都有$fg\in L^1[a,b]$,证明:

$$f\in L^p[a,b]，其中 1<p,q<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

提示：记

$$g_n(t)=\begin{cases}g(t), & |g(t)|\le n,\\ n, & |g(t)|>n,\end{cases}\quad \Lambda_n(g)=\int_a^b f(t)g_n(t)dt,$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda_n(g)=\Lambda(g)$存在，再应用$(L^q[a,b])^*=L^q[a,b]$及共鸣定理即可.

4. 设$y=\{\eta_n\}$为一数列且对一切$x=\{\xi_n\}\in l^q(K)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$收敛，证明: $y\in l^p(K)$，其中p,q同上题.

5. 设$\{x_n\}$为赋范空间X中的点列，且对任一$f\in X^*$都有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(x_n)$绝对收敛,证明:存在正数$M>0$使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\le M\|f\|,\forall f\in X^*.$$

提示:定义$P(f)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\sup\limits_{n\ge1}\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)|$,证明$P$是$X^*$上的次线性泛函,应用与共鸣定理之证的类似方法证明$P(f)\le\frac{2k_0}{r_0}\|f\|$.

§2.7 强弱收敛与弱*-收敛

2.7.1 点列的弱收敛

从前面的讨论中，可以看出：由于引入了距离或范数，因而很好地描述了“任意逼近”的概念.这就是:点列$\{x_n\}$可任意逼近点x用距离$p(x_n,x)\to 0$或用范数$\|x_n-x\|\to 0$来刻画．由于考虑的对象（例如函数或数列）常常组成线性空间，因此，用范数考虑问题更为合适.然而,确实存在这样的点列，它似乎可与某个点任意接近，但这种“任意接近”却不能用范数表述，请看下面的例子.

例 1　在 Hilbert 空间 $l^2(\mathbf{K})$ 中，考察点列：

$$e_n = (\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n-1},1,0,\cdots)(n=1,2,\cdots).$$

从形式上来看，当 n 越来越大时，e_n 中的"0 项"也就愈来愈多.因而,点列 $\{e_n\}$ 似乎应当趋近于零:

$$\theta = (0,0,\cdots,0,\cdots),$$

也就是 $\| e_n - \theta \| = \| e_n \| \to 0 (n \to \infty)$，但实际上 $\| e_n \| = 1 (n=1,2,\cdots)$.

此例说明:距离或范数虽然是描述"任意逼近"的极好方法,但它却不能描述所有的"任意逼近"问题. 因此，有必要寻找别的"较弱的"方法来描述"任意逼近" 即收敛问题. 当然，应当保证:找到的那些"较弱的"方法包括已有的收敛性，亦即,如果按"老的意义"可以"任意逼近"，那么按"新的意义"也必然可以"任意逼近".

对上例中的点列,如果稍加考虑就会发现: e_n 与 $l^2(\mathbf{K})$ 中每个向量 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 的内积趋于零:

$$\langle e_n, y\rangle = \eta_n \to 0 (n \to \infty). \tag{2.7.1}$$

这是因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2$ 收敛，从而通项 $\eta_n \to 0 (n \to \infty)$. 应用 Riesz 表示定理(定理 2.3.5)可知：以上事实等价于

$$f(e_n) \to f(0)\ (n \to \infty), \tag{2.7.2}$$

对每个 $l^2(\mathbf{K})$ 上的有界线性泛函 f 都成立.也就是用任意一个 f 去影响、作用 e_n 之后可与用 f 影响、作用 0 之后任意接近. 在这种意义下，我们当然可以说点列 $\{e_n\}$ 以这种方式收敛于零. 受此例的启发，一般地我们引入以下"弱收敛"的概念.

定义 2.7.1　设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列，如果存在点 $x \in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \forall f \in X^*,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于点 x,记为

$$x_n \xrightarrow{w} x\ (n \to \infty).$$

此时，称 x 是 $\{x_n\}$ 的弱极限.

应用弱收敛的概念，例 1 中的问题可表述成：点列 $\{e_n\}$ 弱收敛于零.

定义 2.7.2　设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列,称 $\{x_n\}$ 强收敛于点 x,是指

$$\| x_n - x \| \to 0\ (n \to \infty),$$

并且记为 $x_n \xrightarrow{s} x\ (n \to \infty)$.

显然,强收敛点列的极限必唯一. 现在考虑的问题是:弱极限是否唯一,弱收敛

与强收敛有何关系，以及弱收敛点列有哪些性质.这些问题将由下面的定理来回答.

定理 2.7.3 设$\{x_n\}$是赋范线性空间X中的点列，则

(i) 若$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty), x_n \xrightarrow{w} y_0\ (n\to\infty)$, 则$x_0=y_0$，即弱极限是唯一的；

(ii) 若$x_n \xrightarrow{s} x_0\ (n\to\infty)$，则$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，即强收敛蕴含弱收敛；

(iii) 若$x_n \xrightarrow{w} x_0\ (n\to\infty)$，则点列$\{x_n\}$有界.

证明 (i) 由定义知：$\forall f\in X^*$有

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(y_0).$$

可见，$f(x_0-y_0)=0\ (\forall f\in X^*)$，由定理 2.2.6 知$x_0=y_0$.

(ii) 由于$\forall f\in X^*$有$|f(x_n)-f(x)|\le\|f\|\|x_n-x\|$，因此强收敛蕴含弱收敛.

(iii) 应用§2.4 中的记号、结果和共鸣定理得

$$\begin{aligned}
& x_n \xrightarrow{w} x\ (n\to\infty) \\
& \Rightarrow \forall f\in X^*, f(x_n)\to f(x)\ (n\to\infty) \\
& \Rightarrow \forall f\in X^*, x_n^{**}(f)\to x^{**}(f)\ (n\to\infty) \\
& \Rightarrow \forall f\in X^*, \text{数列}\{x_n^{**}(f)\}\text{有界} \\
& \Rightarrow \{\|x_n^{**}\|\}\text{有界} \\
& \Rightarrow \{\|x_n\|\}\text{有界}.
\end{aligned}$$

证毕.

2.7.2 算子列的强、弱收敛

定义 2.7.4 设X,Y是赋范空间，$\{T_n\}$是X到Y的一列有界线性算子，作为赋范空间$B(X,Y)$中的点列，$\{T_n\}$收敛于T是指$\|T_n-T\|\to\infty\ (n\to\infty)$，这时也称算子列$\{T_n\}$以算子范数收敛于$T$.

应用范数的定义

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx-Tx\|$$

可知，$\{T_n\}$以算子范数收敛于T当且仅当$\{T_n\}$在X的单位球面

$$S=\{x\in X:\|x\|=1\}$$

上一致收敛于T，即$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n>N$时，对一切$x\in S$，都有

$$\| T_n x - Tx \| < \varepsilon .$$

因此,又将"以算子范数收敛"称为"一致收敛".

有许多问题说明:算子列的"一致收敛"要求太强,不能适应更广泛的收敛问题.为此,我们引入以下强、弱收敛的概念.

定义 2.7.5　设 $T_n, T \in B(X,Y)\ (n=1,2,\cdots)$, 定义

(i) 如果 $\forall x \in X$，点列 $T_n x \xrightarrow{s} Tx\ (n\to\infty)$，则称算子列 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，记为 $T_n \xrightarrow{s} T\ (n\to\infty)$；

(ii) 如果 $\forall x \in X$，点列 $T_n x \xrightarrow{w} Tx\ (n\to\infty)$，则称算子列 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T，记为 $T_n \xrightarrow{w} T\ (n\to\infty)$.

显然

$$T_n \to T\ (n\to\infty) \Rightarrow T_n \xrightarrow{s} T\ (n\to\infty) \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} T\ (n\to\infty).$$

但反之不真.

例 2　设 $X=Y=l^2(\mathbf{K})$, 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in X$,定义

$$T_n x = (0,0,\cdots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots),$$

则 $T_n \in B(X,Y)\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $T_n \xrightarrow{s} 0\ (n\to\infty)$. 但是 $\| T_n - 0 \| = 1$.

其实，由于

$$\| T_n x \| = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} | \xi_k |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \| x \| ,$$

因此 $T_n \in B(X,Y)$ 且 $\| T_n \| \le 1$. 同时，由 $\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^2$ 收敛可知，$\| T_n x \| \to 0$, 即

$$\| T_n x - 0 \cdot x \| \to 0\ (n\to\infty) .$$

这表明算子列 $\{T_n\}$ 强收敛于零算子. 另一方面, 对 $e_n \in X$ (如例 1)，由

$$\| T_n e_{n+1} \| = 1\ (n=1,2,\cdots)$$

知 $\| T_n \| \ge 1$, 故 $\| T_n \| = 1 (n=1,2,\cdots)$.可见 $\{T_n\}$ 不一致收敛于零算子. 因此，由 $\{T_n\}$ 强收敛于 T 不能得到 T_n 一致收敛 T .

例 3　设 X, Y 均为 $l^2(\mathbf{K})$, $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2(\mathbf{K})$,定义

$$T_n x = (\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n},\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则 $T_n \in B(X,Y)$, $\| T_n \| = 1 (n=1,2,\cdots)$ 且 $\{T_n\}$ 弱收敛于 0, 但是不强收敛于 0.

事实上，$\forall x \in l^2(\mathbf{K})$ 有 $\|T_n x\| = \|x\|$，从而 $\|T_n\| = 1$. 对 $f \in l^2(\mathbf{K})^* = l^2(\mathbf{K})$,

记 $f=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，则 $\forall x\in l^2(\mathbf{K})$ 有

$$|f(T_nx)|=|\langle T_nx,f\rangle|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_{k+n}\right|\le\|x\|\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_{k+n}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

而且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_{k+n}|^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}|\eta_i|^2\to 0\,(n\to\infty),$$

从而

$$f(T_nx)\to 0\,(n\to\infty),\forall f\in l^2(\mathbf{K})^*.$$

因此 $T_nx\xrightarrow{w}0\,(n\to\infty),\forall x\in l^2(\mathbf{K})$． 由定义知 $\{T_n\}$ 弱收敛于零. 但是当 $m\ne n$ 时，有

$$\|T_ne_1-T_me_1\|=\|e_{n+1}-e_{m+1}\|=\sqrt{2}.$$

因此,点列 $\{T_ne_1\}$ 不是基本列，于是它不强收敛. 由定义知 $\{T_n\}$ 不强收敛于零算子. 因此, 由 $T_n\xrightarrow{w}T\,(n\to\infty)$ 不能得到 $T_n\xrightarrow{s}T\,(n\to\infty)$.

关于算子列强收敛的条件有

定理 2.7.6 设 X,Y 为 Banach 空间，$T_n\in B(X,Y)\,(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{T_n\}$ 强收敛的充要条件是

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) 对 X 的某个稠子集 D 中的每个 x，点列 $\{T_nx\}$ 强收敛.

证明 ($\Rightarrow$) 设 $T_n\xrightarrow{s}T\,(n\to\infty)$，则对任意 $x\in X$ 都有

$$T_nx\xrightarrow{s}Tx\,(n\to\infty).$$

从而 $\{T_nx\}$ 有界，即 $\sup\{\|T_nx\|:n\in\mathbf{N}\}<\infty$. 于是, 由共鸣定理可知 $\{\|T_n\|\}$ 有界，可见(i)成立. 对于(ii), 只要取 $D=X$ 即可.

($\Leftarrow$) 设条件(i)与(ii)满足, 则存在 $M>0$ 使得对于 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\|T_n\|\le M$. 对每个 $x\in D$，由于 $\overline{D}=X$，从而 $\forall\varepsilon>0$，存在 $y\in D$ 使得 $\|x-y\|<\dfrac{\varepsilon}{3M}$. 由于点列 $\{T_ny\}$ 收敛，所以它是基本列. 于是, 存在 N 使得当 $m>n>N$ 时，有

$$\|T_my-T_ny\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $m>n>N$ 时,有

$$\|T_mx-T_nx\|\le\|T_mx-T_my\|+\|T_my-T_ny\|+\|T_ny-T_nx\|$$

$$\le \|T_m\| \cdot \|x-y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n\| \cdot \|x-y\|$$
$$< \varepsilon.$$

可见，点列$\{T_n x\}$为Y中的基本列. 由于Y完备，从而$\{T_n x\}$收敛于唯一的$y \in Y$. 定义$Tx = y$，易见$T: X \to Y$是线性的且$\forall x \in X$有

$$\|Tx\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n x\right\| = \lim_{n\to\infty}\|T_n x\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|T_n\| \cdot \|x\| \le M\|x\|.$$

因此T有界且$\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$. 于是$T \in \mathrm{B}(X,Y)$. 由$T$的定义知$\forall x \in X$有$T_n x \xrightarrow{s} Tx\ (n\to\infty)$. 故算子列$\{T_n\}$强收敛于$T$.证毕.

注 由以上证明知算子列$\{T_n\}$的强极限T满足

$$\|T\| \le \varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|.$$

2.7.3 泛函列的强、弱收敛与弱*-收敛

有界线性泛函列作为算子列的特殊情形，当然适合定义 2.7.4. 针对这种特殊情况，我们引入以下定义.

定义 2.7.7 设X为赋范空间，对$f_n \in X^*(n=1,2,\cdots)$及$f \in X$，定义

(i) 如果$\|f_n - f\| \to 0\ (n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$强收敛于$f$，记为

$$f_n \xrightarrow{s} f\ (n\to\infty),$$

并称f为$\{f_n\}$的强极限.

(ii) 如果$\forall x \in X$有$|f_n(x) - f(x)| \to 0\ (n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$弱*-收敛于$f$，记为

$$f_n \xrightarrow{w^*} f\ (n\to\infty),$$

并称f为$\{f_n\}$的弱*-极限.

(iii) 如果$\forall F \in X^{**}$有$F(f_n) \to F(f)(n\to\infty)$，则称$\{f_n\}$弱收敛于$f$，记为

$$f_n \xrightarrow{w} f\ (n\to\infty),$$

并称f为$\{f_n\}$的弱极限.

由上述定义可知，泛函列$\{f_n\}$的强收敛与弱收敛都是将它作为空间X^*的点列时的强收敛与弱收敛. 于是由定理 2.7.3 知泛函列的强、弱极限是唯一的(如果存在)，且强、弱收敛的泛函将必有界. 另外，这里的弱*-收敛实际上是将泛函作为算子考虑时的强收敛，即逐点收敛. 因此，由定理 2.7.6 得到泛函列弱*-收敛的条件.

定理 2.7.8 设 X 为 Banach 空间，$f_n \in X^*\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\{f_n\}$ 弱*-收敛于 $f \in X^*$ 的充要条件是

(i) $\{\| f_n \|\}$ 有界；

(ii) 存在 X 的稠子集 D 使得 $\forall x \in D$ 有 $\{f_n(x)\}$ 收敛.

本节引入了强收敛、弱收敛与弱*-收敛，由于考虑的对象不同,同一概念可能有不同的含义，请大家自己总结.

习题 2.7

1．设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 是赋范空间 X 中的点列，证明：

(i) $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall T \in B(X)$ 有 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$；

(ii) $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 x；

(iii) 若 $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$，则 $\lambda x_n + y_n \xrightarrow{w} \lambda x + y$，其中 $\lambda \in \mathbf{K}$.

2．设 H 为 Hilbert 空间，证明：

(i) $x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall y \in H$ 有 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$；

(ii) 算子列 $T_n \in B(H)$ 弱收敛于 $T \in B(H)$ 等价于

$$\forall x, y \in H \text{ 有} \langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle;$$

(iii) 泛函列 $\{f_n\} \subset H^*$ 弱收敛于 $f \in H^*$ 当且仅当 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

3．设 X 是自反 Banach 空间，$f_n, f \in X^*(n \in \mathbf{N})$，则

$$f_n \xrightarrow{w} f\ (n \to \infty) \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f\ (n \to \infty).$$

4. 设 $1 < p, q < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,\ y_n \in L^q[a,b]\ (n=1,2,\cdots)$ 且对每个 $x \in L^p[a,b]$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x(t) y_n(t) dt$$

存在且有限，证明:

(i) 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\int_a^b | y_n(t) |^q\, dt \le M\ (n=1,2,\cdots);$$

(ii) 存在 $y \in L^q[a,b]$ 使得 $\forall x \in L^q[a,b]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x(t) y_n(t) dt = \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

5. 设 X 是 Banach 空间，$x_n \in X(n=1,2,\cdots)$，证明: $\{x_n\}$ 弱收敛的充要条件

是

(i) $\{\|x_n\|\}$有界；

(ii) 对X^*的某个稠子集中的每个f有$\{f(x_n)\}$在数域$\mathbf{K}$中收敛.

§2.8 紧算子

前面几节中，我们讨论了有界线性算子的许多重要性质及某些应用. 然而，确实有许多线性算子比有界线性算子性质更好，更便于研究.这就是所谓的紧算子.

2.8.1 定义与例子

定义 2.8.1 设X,Y是赋范空间，$T:X\to Y$是线性算子. 如果T将X中的任一有界集A映成Y中的列紧集$T(A)$，则称T是紧线性算子，简称为紧算子.

由定义易知：紧算子有下面的基本性质：

(1) 紧算子必为有界算子，从而连续;

(2) $T:X\to Y$是紧算子等价于$T(S_X)$是列紧集，其中

$$S_X=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$$

是X中的闭单位球.

其实，由于列紧集必有界（习题 1.1.9），从而紧算子T将有界集映成有界集，因此是有界的，可见 1 真. 如果$T:X\to Y$为紧算子，则由定义知$T(S_X)$是Y中的列紧集. 反之，若$T(S_X)$是列紧集，则T必为紧算子. 因为对X中的任一有界集A，存在充分大的正数M使得$M^{-1}A\subset S_X$,从而可知

$$T(A)\subset M\,T(S_X).$$

由于$T(S_X)$列紧，则易见$MT(S_X)$也列紧. 因此,$T(A)$为列紧集的子集，它必然是列紧集，故T是紧算子. 可见, 结论(2)也成立.

下面介绍几个例子.

例 1 设$T\in B(X,Y)$且X与Y中至少一个是有限维，则T紧算子.

证明 (1) 如果Y是有限维赋范空间，则Y中的单位球$S_Y=\{y:\|y\|\le 1\}$是列紧集(定理 1.2.4). 由于$T(S_X)$有界, 且

$$\|Tx\|\le\|T\|\|x\|<(\|T\|+1),\forall x\in S_X,$$

从而

$$(\|T\|+1)^{-1}T(S_X)\subset S_Y.$$

因此$(\|T\|+1)^{-1}T(S_X)$列紧，故$T(S_X)$也列紧. 从而由上述性质(2)知T是紧算子.

(2) 若 X 是有限维赋范空间，则 $T(X)$ 是 Y 的有限维的子空间，由情形(1)知：作为 X 到 $T(X)$ 上的有界线性算子，T 将 X 中的闭单位球 S_X 映成 $T(X)$ 中的列紧集 $T(S_X)$，因此 $T(S_X)$ 也是 Y 中的列紧集,故 T 是紧算子.

如果 $T\in B(X,Y)$ 的值域 $T(X)$ 是有限维的,则称 T 是有限秩算子. 根据例 1 可知:有限秩算子必是紧算子.

例 2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为赋范空间 X 中的线性无关向量,对

$$f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^*,$$

定义

$$T_f x=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\varepsilon_i,\forall x\in X,$$

则 T_f 是 X 上的有限秩算子，而且是紧算子.

其实，由于

$$\|T_f x\|\le\left(\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\cdot\|\varepsilon_i\|\right)\|x\|,$$

从而 $T_f\in B(X)$.又因为 $\dim T(X)\le n$，从而 T 是有限秩的，故为紧算子.

例 3 设 $K(s,t)$ 是 $D=[a,b]\times[a,b]$ 上的连续二元函数，定义算子

$$T:C[a,b]\to C[a,b]$$

如下：

$$(Tx)(t)=\int_a^b x(s)K(s,t)ds,\forall x\in C[a,b],$$

则 $T\in B(C[a,b])$ 且 T 是紧算子.

2.8.2 紧算子的性质

设 X,Y 是赋空间，用 $K(X,Y)$ 表示一切从 X 到 Y 的紧算子之集，当 $X=Y$ 时，记 $K(X,Y)=K(X)$.

定理 2.8.2 如果 Y 完备，则 $K(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 的闭子空间.

证明 显然 $0\in K(X,Y)$. 设 $A,B\in K(X,Y),\alpha,\beta$ 是任意非零数，则 $A(S_X)$ 与 $B(S_X)$ 都是 Y 中的列紧集. 取 $(\alpha A+\beta B)(S_X)$ 中的一个点列

$$\{(\alpha A+\beta B)(x_n)\}，其中\ x_n\in S_X\ (n=1,2,\cdots).$$

因为 $Ax_n\in A(S_X)\,(n=1,2,\cdots)$,从而它有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}$. 相对应的点列

$$Bx_{n_k}\in B(S_X)\,(k=1,2,\cdots)$$

也有收敛列 $\{Bx_{n_{k_i}}\}$. 因此，$\{(\alpha A+\beta B)x_n\}$ 有收敛子列 $\{(\alpha A+\beta B)x_{n_{k_i}}\}$，故

$$\alpha A+\beta B\in K(X,Y).$$

因此，$K(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 的线性子空间．设 $A_n\in K(X,Y)$ $(n=1,2,\cdots)$ 且

$$A_n\to A\in B(X,Y)\,(n\to\infty),$$

则 $\forall\varepsilon>0,\exists n$ 使得 $\|A_n-A\|<\dfrac{\varepsilon}{3}$．从而对于任意 $x\in S_X$ 有

$$\|A_nx-Ax\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 A_n 是紧算子，所以 $A_n(S_X)$ 有有限的 $\dfrac{\varepsilon}{3}$-网：

$$\{A_nx_1,A_nx_2,\cdots,A_nx_m\},$$

其中 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset S_X$．设 $x\in S_X$，则存在 $1\le j\le m$ 使得

$$\|A_nx-A_nx_j\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此

$$\|Ax-Ax_j\|\le\|Ax-A_nx\|+\|A_nx-A_nx_j\|+\|A_nx_j-Ax_j\|<\varepsilon.$$

所以 $\{Ax_1,Ax_2,\cdots,Ax_m\}$ 是 $A(S_X)$ 的有限 ε-网．可见，$A(S_X)$ 是 Y 中的列紧集，故 A 紧算子．从而 $K(X,Y)$ 是闭的．证毕．

定理 2.8.3 设 $A\in K(X,Y)$，则

(i) 如果 $B\in B(Y,Z), C\in B(E,X)$，则 $BA\in K(X,Z)$ 且 $AC\in K(E,Y)$；

(ii) $A^*\in K(Y^*,X^*)$．

证明 (i) 设 D 是 X 中的有界集，则 $A(D)$ 是 Y 中的列紧集．设 $\{By_n\}$ 为 $(BA)(D)$ 中的点列，其中 $\{y_n\}$ 为 $A(D)$ 的点列，由于 $A(D)$ 列紧，从而存在 $y_{n_k}\to y_0(k\to\infty)$．因为 B 连续，从而

$$By_{n_k}\to By_0(k\to\infty),$$

故 $(BA)(D)$ 是 Z 中的列紧集，因此 $BA\in K(X,Z)$，同理可证 $AB\in K(E,Y)$．

(ii) 设 D 是 Y^* 中的有界集，则存在 $M>0$，使得 $\|f\|\le M(\forall f\in D)$，根据定理 1.1.18，只要证明：$\forall\varepsilon>0,T^*(D)$ 有有限的 ε-网．记

$$S=\{x\in X:\|x\|\le 1\},$$

则 S 为 X 中的有界集．由于 $T:X\to Y$ 是紧算子，从而 $T(S)$ 是 Y 中的列紧集，由定理 1.1.18 知，对 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$（$\varepsilon$ 为任一正数），$T(S)$ 有有限的 η-网：

$$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}.$$

根据定理 1.1.18 证明后面的注及推论 2，可假设$B\subset T(S)$.于是，存在S的子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$使得$Tx_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$.因此，$\forall x\in S,\exists k\in\{1,2,\cdots,n\}$使得

$$\|Tx-Tx_k\|<\eta. \tag{2.8.1}$$

现定义$P:Y^*\to\mathbf{K}^n$如下:

$$Pf=(f(Tx_1),f(Tx_2),\cdots,f(Tx_n)=((T^*f)(x_1),(T^*f)(x_2),\cdots,(T^*f)(x_n)),$$

从而P为线性算子，且由$\dim\mathbf{K}^n=n<\infty$与例 1 知：$P$是紧算子，因此$P(D)$是$\mathbf{K}^n$中的列紧集. 于是，由定理 1.1.18 的推论 2 可知：点集$P(D)$含有有限的$\frac{\varepsilon}{4}$-网$\{Pf_1,Pf_2,\cdots,Pf_m\}$,其中$f_i\in D(i=1,2,\cdots,m)$. 从而$\forall f\in D,\exists i\in\{1,2,\cdots,m\}$使得

$$\|Pf-Pf_i\|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.8.2}$$

下证$\{T^*f_{1,}T^*f_2,\cdots,T^*f_m\}$是$T^*(D)$的有限$\varepsilon$-网.对任一$f\in D$，由不等式(2.8.2)知$\forall k\in\{1,2,\cdots,m\}$，有

$$|(T^*f)(x_k)-(T^*f_i)(x_k)|^2\le\sum_{k=1}^{m}|f(Tx_k)-f_i(Tx_k)|^2=\|P(f-f_i)\|^2<(\frac{\varepsilon}{4})^2.$$

于是,由(2.8.1)知

$$\begin{aligned}&|(T^*f)(x)-(T^*f_i)(x)|\\&\le|(T^*f)(x)-(T^*f)(x_k)|+|(T^*f)(x_k)-(T^*f_i)(x_k)|\\&\quad+|(T^*f_i)(x_k)-(T^*f_i)(x)|\\&\le\|f\|\|Tx-Tx_k\|+\frac{\varepsilon}{4}+\|f_i\|\|Tx_k-Tx\|\\&\le M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4}+M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\\&=\frac{3}{4}\varepsilon.\end{aligned}$$

因此$\|T^*f-T^*f_i\|\le\frac{3}{4}\varepsilon<\varepsilon$，从而$\{T^*f_1,T^*f_2,\cdots,T^*f_m\}$是$T^*(D)$的一个有限$\varepsilon$-网，故$T^*(D)$是$X^*$中的列紧集. 从而$T^*:Y^*\to X^*$是紧算子.证毕.

推论 1 若X为 Banach 空间，则$K(X)$是 Banach 代数$B(X)$中的闭的双侧

理想，即

(i) 若 $A,B\in K(X)$，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{K},\alpha A+\beta B\in K(X)$；

(ii) 若 $A\in K(X)$，则 $\forall B\in B(X),AB$ 与 $BA\in K(X)$；

(iii) 若 $A_n\in K(X)(\forall n\in\mathbf{N}),A_n\to A\in B(X)(n\to\infty)$，则 $A\in K(X)$.

习题 2.8

1. 设 $T\in B(X,Y)$，证明：T 是有限秩算子当且仅当存在 $f_1,\cdots,f_n\in X^*$ 及 Y 的线性无关向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使得 $Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\varepsilon_i,\forall x\in X$.

2. 设算子 $T\in K(X)$，则对于任一 $\mathbf{K}$ 上的多项式 $P(t)=\sum_{i=1}^{n}a_it^i$，有

$$P(T)=\sum_{i=1}^{n}a_iT^i\in K(X).$$

3. 设 $T\in B(X)$ 有有界逆算子，证明：

(i) $T^{-1}\in K(X)\Leftrightarrow\dim X<\infty$；

(ii) $I\in K(X)\Rightarrow S:=\{x\in X\mid\|x\|=1\}\subset X$ 列紧.

4. 设 $T\in B(X,Y)$，证明：

(i) $T\in K(X,Y)\Rightarrow T(\overline{B}(0,1))\subset Y$ 列紧；

(ii) $T\in K(X,Y)\Rightarrow T(X)$ 可分.

5. 设 $x_n,x\in X(n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\xrightarrow{w}x(n\to\infty)$，证明：

(i) 如果 $T\in B(X,Y)$，则 $Tx_n\xrightarrow{w}Tx(n\to\infty)$；

(ii) 如果 $T\in K(X,Y)$，则 $Tx_n\xrightarrow{s}Tx(n\to\infty)$.

6. 证明例 3 中的算子 T 是 $C[a,b]$ 上的紧算子.

7. 设 X 是赋范空间，证明 $F(X)=\{T\mid T\in B(X)\text{且}\dim T(X)<\infty\}$ 是代数 $B(X)$ 与 $K(X)$ 的双侧理想.

8. 证明推论 1.

9. 设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性算子. 证明：T 是紧算子当且仅当 X 中任一有界点列在 T 下的像具有收敛子列.

10. 设 X,Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性算子. 证明：T 是紧算子当且仅当 X 的闭单位球 T 下的像是列紧集.

11. 设 X,Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 是线性算子.如果

$$x_n \xrightarrow{w} x\ (n \to \infty) \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{s} Tx\ (n \to \infty),$$

则称T是全连续的.证明:

(1) 如果T是全连续的,则它是有界的;

(2) 如果T是紧算子,则它必是全连续的;

(3) 如果X是自反的且T是全连续的,则T必是紧算子.

12. 设X,Y是 Banach 空间, $T:X \to Y$是紧算子,证明:$T(X)$是闭集当且仅当$\dim T(X) < +\infty$.

13. 设$\{f_1, f_2, \cdots, f_m, g_1, g_2, \cdots, g_n\} \subset C[a,b]$,定义

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y),\ (Kf)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy.$$

证明: $K \in B(C[\mathrm{a,b}])$且K是有限秩的.

14. 定义

$$T(c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots) = \left(c_1, \frac{1}{2} c_2, \cdots, \frac{1}{n} c_n, \cdots \right),$$

证明:T是$l^2(\mathbf{K})$上的紧算子且其值域不是闭的.

15. 设$\{\alpha_n\}$是的数列,定义

$$T(c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots) = (\alpha_1 c_1, \alpha_2 c_2, \cdots, \alpha_n c_n, \cdots),$$

给出映射T成为$l^2(\mathbf{K})$上的有界线性算子的条件,及T成为$l^2(\mathbf{K})$上的紧算子的条件.

16. 设X,Y是赋范空间, $T:X \to Y$是紧算子,X_0是X的线性子空间,证明:T在X_0上的限制$T:X_0 \to Y$也是紧算子.

第三章　非线性算子

在第二章中，我们研究了赋范线性空间之间的线性算子的有界性、连续性、可逆性与紧性等重要性质. 由于讨论的算子都是线性的，这就大大地影响了相应理论的实用价值，因为实际问题（如微分方程等）中遇到的算子大都是非线性的. 因此，有必要研究一下非线性算子的基本性质，从而使得我们的理论能更广泛地应用到实际问题的讨论之中.

本章将在前两章的基础上，介绍非线性泛函分析中的一些重要概念，讨论非线性算子的连续性、有界性、紧性、导数、积分与微分等基本性质. 研究非线性算子的一个重要方法，就是利用导算子的概念将非线性问题化为线性问题来处理. 通过本章的学习，大家会看到数学分析中的许多重要概念（积分、导数、中值定理、Taylor 公式等）如何推广到一般算子上来. 同时,也将看到这些重要的推广对于研究非线性问题的重要作用.

如果说线性泛函分析是研究"直线与平面"的推广，那么非线性泛函分析则是研究"曲线与曲面"的学科. 研究曲面的方法之一是考虑其切平面，而处理非线性算子的方法则考虑其导算子. 正像曲面比平面复杂得多一样，非线性泛函分析比线性泛函分析的内容更多、更复杂. 因此，本章只能介绍一些基本概念与方法. 有兴趣的读者，可参考有关的专门书籍，作进一步的学习与研究.

§3.1　连续性与有界性

3.1.1 定义与例子

设 E_1 与 E_2 是两个 Banach 空间，$D \subset E_1, A: D \to E_2$ 是一算子(不要求 A 是线性的，也不要求 D 是 E_1 的线性子空间).

定义 3.1.1 若 $x_0 \in D$ 且 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $x \in D$ 且 $\|x - x_0\| < \delta$ 时，恒有

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon,$$

则称 A 在 x_0 连续. 如果 A 在 D 中的每一点都连续，则称 A 在 D 上连续.

如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x', x'' \in D$ 且 $\|x' - x''\| < \delta$ 时，恒有

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon,$$

则称 A 在 D 上一致连续.

如果 A 将 D 中的任一有界集映成 E_2 中的有界集，则称 A 在 D 上有界.

注 1 如果将算子 A 看作是从距离空间 D 到距离空间 E_2 的映射，则这里定义

的连续性与第一章中的概念一致．因此， 定理 1.1.13 也成立．

注 2 对于线性算子来说，连续性与有界性是等价的，但对非线性算子却没有这种等价关系，请看下面的两个例子．

例 1 (连续但无界的非线性泛函) 设

$$D=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\},$$

定义 $f:D\to\mathbf{R}$ 如下：

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}，\ \forall(x,y)\in D.$$

显然，f 在 D 上连续，但 f 将 D 中的有界集

$$S=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\leq 1\}$$

映成了 $\mathbf{R}$ 中的无界集

$$f(S)=\left\{\frac{1}{x^2+y^2} \,\Big|\, 0<x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

因此，f 是连续的无界非线性泛函．

例 2 (有界但不连续的非线性泛函) 定义

$$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}，\ f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in\mathbf{Q}^2,\\ 0, & (x,y)\notin\mathbf{Q}^2,\end{cases}$$

则 f 是有界泛函，但不连续．

3.1.2 连续算子的性质

在一定条件下连续性可以保证有界性．

定理 3.1.2 设 $A:D\to E_2$ 连续，$D\subset E_1$，则

(i) $\forall S\subset D$，$A\left(\overline{S}\cap D\right)\subset\overline{A(S)}$；

(ii) 若 S 为 D 的紧子集，则 $A(S)$ 是 E_2 中的紧子集；

(iii) 若 D 是 E_1 的紧子集，则 A 有界；

(iv) 若 $\dim E_1<\infty$ 且 D 是闭集，则 A 有界．

证明 (i) 设 $S\subset D$．如果 $Ax_0\in A\left(\overline{S}\cap D\right)$，其中 $x_0\in\overline{S}$，则存在

$$x_n\in S(n=1,2,\cdots)$$

使得

$$\|x_n-x_0\|\to 0(n\to\infty).$$

由于 A 连续，从而

$$Ax_n \to Ax_0(n \to \infty).$$

由于 $Ax_n \in A(S)$ $(n=1,2,\cdots)$，因此 $Ax_0 \in \overline{A(S)}$. (i)得证.

(ii) 设$\{Ax_n\}$为 $A(S)$ 中的任一无穷点列，其中$\{x_n\}$为 S 中的无穷点列．由于 S 是紧集，因此$\{x_n\}$有收敛子列，设 $x_{n_k} \to x_0(k \to \infty)$．因为 S 是闭集，所以 $x_0 \in S$．由 A 连续知

$$Ax_{n_k} \to Ax_0(k \to \infty).$$

可见,$\{Ax_n\}$有收敛子列$\{Ax_{n_k}\}$收敛于 $Ax_0 \in A(S)$．故 $A(S)$ 是 E_2 的紧子集.

(iii) 设 $S \subset D$ 是有界集，则由定理 1.1.16 知 $\overline{S}$ 为列紧闭集，从而为紧集．由(ii)知 $A(\overline{S})$ 是 E_2 中的紧集,从而有界(习题 1.1.9)．由于 $A(S) \subset A(\overline{S})$，故 $A(S)$ 也是有界集．因此 A 有界.

(iv) 设 $S \subset D$ 是有界集，则 $\overline{S} \subset \overline{D} = D$ 是紧子集(定理 1.2.4)．由(ii)知 $A(\overline{S})$ 是 E_2 中的紧集,从而是有界集．因为 $A(S) \subset A(\overline{S})$，于是 $A(S)$ 为有界集．故 A 有界.

3.1.3 一类复合算子的连续性与有界性

定理 3.1.3 若 f 是$[a,b]\times(-\infty,\infty)$上连续的二元实值函数，定义

$$(F\varphi)(x) = f(x,\varphi(x)),\quad \forall x \in [a,b],$$

则 $F: C[a,b] \to C[a,b]$连续且有界.

证明 首先证明 F 连续．由复合函数的连续性知：当 $\varphi \in C[a,b]$ 时，$F\varphi \in C[a,b]$．于是，F 是$C[a,b]$到自身的算子．设

$$\varphi_n \in C[a,b]\ (n=1,2,\cdots) \text{且} \varphi_n \to \varphi\ (n \to \infty),$$

则$\{\varphi_n\}$为 $C[a,b]$ 中的有界点列．于是，存在 $M>0$ 使得

$$|\varphi_n(x)| \le M,\quad |\varphi(x)| \le M\quad (\forall x \in [a,b], n=1,2,\cdots).$$

由于 f 在$[a,b]\times[-M,M]$上一致连续，从而在$[a,b]$上,有

$$f(x,\varphi_n(x)) \xrightarrow{u} f(x,\varphi(x))(n \to \infty).$$

因此

$$F\varphi_n \to F\varphi\ (n \to \infty).$$

故 F 在 $C[a,b]$ 上连续.

下证 F 有界．设 S 为 $C[a,b]$ 中的有界集，则存在 $M>0$，使得

$$|\varphi(x)| \le M, \forall \varphi \in S, \forall x \in [a,b].$$

由于 f 在$[a,b]\times[-M,M]$上连续，从而有界即存在 $K>0$，使得

$$|f(x,y)|\le K\ ,\quad \forall x\in[a,b],\forall y\in[-M,M]\ .$$

因此，对任一$\varphi\in S$有

$$|f(x,\varphi(x)|\le K\ ,\quad \forall x\in[a,b]\ .$$

可见$\|F\varphi\|\le K$（$\forall\varphi\in S$），从而$F(S)$有界. 这就证明了F有界. 证毕.

定理 3.1.4 若f是$[a,b]\times(-\infty,\infty)$上连续且有界的实值函数，定义

$$(F\varphi)(x)=f(x,\varphi(x))\ ,$$

则对于任意的$p_1,p_2\in(1,\infty)$，算子$F:L^{p_1}[a,b]\to L^{p_2}[a,b]$连续且有界.

证明 分以下几步完成.

(i) 若$\varphi\in L^{p_1}[a,b]$，则$F\varphi\in L^{p_2}[a,b]$. 由于φ在$[a,b]$上可测且$a.e.$有限，因此$(F\varphi)(x)=f(x,\varphi(x))$在$[a,b]$上$a.e.$有定义. 由于$f$连续且有界，从而只要证明$F\varphi$在$[a,b]$上可测，便知它属于$L^{p_2}[a,b]$. 因为$\varphi$在$[a,b]$上可测，由鲁金定理知存在闭集$D_n\subset[a,b]$，使得$\varphi$在$D_n$上连续且

$$m[a,b]-mD_n<\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)\ .$$

令$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$，则

$$mD\ge mD_n\ge m[a,b]-\frac{1}{n}\to m[a,b]\ (n\to\infty)\ .$$

因此，$mD=m[a,b]$. 于是$m([a,b]\setminus D)=0$. $\forall a\in\mathbf{R}$定义

$$\Delta_n=\{x\in D_n\mid f(x,\varphi(x))\ge a\}\ .$$

则Δ_n可测(因$g(x):=f(x,\varphi(x))$在D_n上连续). 因此，

$$\{x\in D\mid f(x,\varphi(x))\ge a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$$

可测. 由于$a\in\mathbf{R}$任意，可知$F\varphi$在D上可测，从而$F\varphi$在

$$[a,b]=D\bigcup([a,b]\setminus D)$$

上可测.

(ii) $F:L^{p_1}[a,b]\to L^{p_2}[a,b]$连续. 否则, 存在$\varepsilon_0>0$，及

$$\varphi_n,\varphi_0\in L^{p_1}[a,b]\ \ (n=1,2,\cdots)$$

使得

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|_{p_1}=\left(\int_a^b|\varphi_n(x)-\varphi_0(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}\to 0(n\to\infty)\ .$$

但是,对于任意$n\in\mathbf{N}$有

$$\|F\varphi_n - F\varphi_0\|_{p_2} = \left(\int_a^b |f(x,\varphi_n(x)) - f(x,\varphi_0(x))|^{p_2} dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \geq \varepsilon_0.$$

由习题 1.2.4 知基本列 $\{\varphi_n(x)\}$ 有子列 $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) = \varphi_0(x)\text{，}\quad a.e.\text{于}[a,b].$$

定义

$$g_k(x) = |f(x,\varphi_{n_k}(x)) - f(x,\varphi_0(x))|^{p_2}.$$

由 f 连续可知

$$g_k(x) \to 0, a.e.\text{于}[a,b]\ (k\to\infty).$$

易见 g_k 在 $[a,b]$ 上可测且

$$|g_k(x)| \leq (2M)^{p_2}\text{，}\quad \forall x\in[a,b]\text{，}\quad k=1,2,\cdots,$$

其中

$$M = \sup\{|f(x,y)| : x\in[a,b], y\in(-\infty,\infty)\} < \infty.$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\int_a^b g_k(x)dx \to 0(k\to\infty),$$

即

$$\|F\varphi_{n_k} - F\varphi_0\| \to 0\ (k\to\infty).$$

这与 $\|F\varphi_{n_k} - F\varphi_0\| \geq \varepsilon_0 (k=1,2,\cdots)$ 矛盾．故 F 连续．

(iii) F 有界．这是显然的，因为

$$\forall \varphi\in L^{p_1}[a,b]\text{，}\quad \|F\varphi\|_{p_2} \leq (b-a)^{\frac{1}{p_2}} M.$$

习题 3.1

1. 定义 $A: C[a,b]\to C[a,b]$ 如下：

$$(Af)(x) = 1 + f(x) + f^2(x),\quad \forall x\in[a,b],$$

证明：A 是连续的有界非线性算子．

2. 定义 $l^2(\mathbf{R})$ 到 $l^2(\mathbf{R})$ 的算子 A 如下：

$$A(x_1,x_2,\cdots) = (x_1\sin x_1, x_2\sin x_2,\cdots)$$

证明：A 是连续有界非线性算子且 $\forall x\in l^2(\mathbf{R})$，有

$$\|Ax\| \leq \|x\|.$$

3. 定义 $f:l^2(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 如下：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kr_k\,,\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2(\mathbf{R})\,.$$

其中

$$r_k=\max\{0,|x_k|-1\}=\begin{cases}0, & |x_k|<1,\\ |x_k|-1, & |x_k|\ge 1,\end{cases}$$

证明：f 是连续的无界非线性泛函.

4. 设 E 为完备赋范线性空间，定义 $A:E\to E$ 为

$$Ax=\|x\|\cdot x\,,\quad \forall x\in E\,,$$

则 A 是连续的有界非线性算子.

5. 设 X 是 Banach 空间且

$$D=\{T\in B(X):\|T\|<1\}.$$

定义

$$AT=(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k\ \ (\forall T\in D)\,,$$

证明 $A:D\to B(X)$ 是连续的无界非线性算子.

(提示：证明 $\|AT_n-AT_0\|=\|(AT_n)(T_0-T_n)(AT_0)\|$)

6. 设算子 $A_n:D\to E_2$ 连续 $(n=1,2\cdots)$ 且 $A:D\to E_2$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}\|A_nx-Ax\|=0\,.$$

证明：A 连续.

7. 设算子 $A:D\to E_2$ 连续且 D 是 E_1 的紧子集，则 A 必一致连续.

8. 设算子 $A:D\to E_2$ 在 $x_0\in D$ 处连续，则存在 $M>0$ 及 $\delta>0$ 使得当 $x\in D$ 且 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|Ax\|\le M$.

9. 设算子 $A,B:D\to E_2$ 都在 $x_0\in D$ 处连续，则

$$A+B,\alpha A:D\to E_2$$

都在 x_0 连续，其中

$$(A+B)x=Ax+Bx\,,\ (\alpha A)x=\alpha Ax\big(\forall x\in D,\forall\alpha\in\mathbf{K}\big).$$

10. 设 E_2 是 Banach 代数(定义 2.1.6)，$A,B:D\to E_2$ 在 $x_0\in D$ 连续，则

$$A\times B:D\to E_2$$

在 x_0 连续，其中 $(A\times B)(x)=(Ax)(Bx),\forall x\in D$.

§3.2 紧性与全连续性

3.2.1 定义与基本性质

设E_1与E_2是两个 Banach 空间，$D \subset E_1$，$A: D \to E_2$是任一算子.

定义 3.2.1 若A将D中的任一有界集S映成E_2中的列紧集$A(S)$，则称$A: D \to E_2$是紧算子．如果A是连续的紧算子，则称A是全连续算子.

显然，紧算子必有界; A是紧算子当且仅当D中任何有界点列$\{x_n\}$的像$\{Ax_n\}$有收敛子列.

非线性紧算子与线性紧算子有类似的性质.

定理 3.2.2 设E_1, E_2, E_3为 Banach 空间，$D \subset E_1$.对算子$A: D \to E_2$，$B: E_2 \to E_3$，有

(i) 若A为紧算子且B连续，则BA是紧算子.

(ii) 若A有界且B是紧算子，则BA是紧算子.

(iii) 若A与$C: D \to E_2$都是紧的，则$\alpha A + \beta C$是紧算子，其中$\alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

证明 (i) 设S为D中的有界集，则$A(S)$为E_2中的列紧集．于是$\overline{A(S)}$是列紧闭集，从而为紧集．因为B连续．从而由定理 3.1.2 知$B\left(\overline{A(S)}\right)$是$E_3$中的紧集．故

$$(BA)(S) = B(A(S)) \subset B(\overline{A(S)})$$

是列紧集(定理 1.1.16)．因此BA是紧算子.

(ii) 设$S \subset D$是有界集，则$A(S)$是E_2中的有界集.由于B是紧算子，从而$(BA)(S) = B(A(S))$是E_3中的列紧集．故BA是紧算子.

(iii) 设$\{x_n\}$为D中的有界点列，因为A为紧算子，从而$\{Ax_n\}$有收敛子列$\{Ax_{n_k}\}$.设$Ax_{n_k} \to y_0\ (k \to \infty)$.又$\left\{x_{n_k}\right\}$也是$D$中的有界点列且$C$也是紧算子，从而存在子列$\left\{x_{n_{k_i}}\right\}$

$$Cx_{n_{k_i}} \to z_0 \in E_2\ (i \to \infty).$$

故

$$(\alpha A + \beta C)x_{n_{k_i}} = \alpha Ax_{n_{k_i}} + \beta Cx_{n_{k_i}} \to y_0 + z_0\ (i \to \infty).$$

因此，$\{(\alpha A + \beta C)x_n\}$有收敛子列．故$\alpha A + \beta C$是紧算子.

关于全连续算子列的极限运算有.

定理 3.2.3 设$A_n: D \to E_2$是全连续算子$(n = 1,2,\cdots)$且$A: D \to E_2$是一算

子．如果对任何有界集$S\subset D$，在S上有

$$\|A_nx-Ax\|\xrightarrow{u}0\quad(n\to\infty),$$

即$\forall\varepsilon\in 0$，$\exists N$，当$n>N$时，对一切$x\in S$有

$$\|A_nx-Ax\|<\varepsilon,$$

则$A:D\to E_2$全连续．

证明 先证明A是连续算子.设$x_n\in D(n=0,1,2,\cdots)$且$x_n\to x_0\in D$，则

$$S=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$$

是D中的有界集．于是对任意$\varepsilon>0$，$\exists N$使得

$$\|A_Nx_k-Ax_k\|<\frac{\varepsilon}{3}\ (k=0,1,2,\cdots).$$

由于A_N连续，于是存在K_0，使得当$k>K_0$时，有

$$\|A_Nx_k-A_Nx_0\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当$k>K_0$时，有

$$\begin{aligned}\|Ax_k-Ax_0\|&\le\|Ax_k-A_Nx_k\|+\|A_Nx_k-A_Nx_0\|\\&\quad+\|A_Nx_0-Ax_0\|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，A连续．

再证A是紧算子．设S为D中的任一有界集．$\forall\varepsilon>0$，由假设可知存在某个n使得

$$\|A_nx-Ax\|<\varepsilon,\quad\forall x\in S.$$

故$Ax\in B(A_nx,\varepsilon)$（$\forall x\in S$）．由此可见，$A_n(S)$是$A(S)$的列紧$\varepsilon$-网．由定理1.1.18 的推论 1 知：$A(S)$列紧(注意：定义$A:D\to E_2$是紧算子时要求空间$E_1,E_2$都完备)．因此，$A$是紧算子．证毕．

3.2.2 全连续算子的结构

定理 3.2.4 设$A:D\to E_2$的定义域D有界，则以下等价：

(i) $A:D\to E_2$全连续．

(ii) $\forall\varepsilon>0$，存在连续且有界算子$A_\varepsilon:D\to E_\varepsilon$使得

$$\|Ax-A_\varepsilon x\|<\varepsilon,\quad\forall x\in D.$$

其中 E_ε 是 E_2 的某个有限维子空间.

(iii) 存在连续且有界算子 $A_n : D \to E_n^{(0)}$ 使得

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x$$

在 D 上一致地成立且 $\|A_n x\| \le \frac{1}{2^n}$ $(\forall x \in D, n = 1,2,\cdots)$,其中 $E_n^{(0)}$ 是 E_2 的有限维子空间.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 由于 D 有界且 A 全连续，从而 $A(D)$ 是 E_2 中的列紧集. 故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists y_1, y_2, \cdots, y_n \in E_2$ 使得

$$A(D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon) \text{（定理 1.1.18）.}$$

用 E_ε 表示由 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 生成的 E_2 的子空间, 则

$$\dim E_\varepsilon \le n < \infty .$$

$\forall y \in E_2$，令

$$d_i(y) = \max\{\varepsilon - \| y - y_i \|, 0\}, \quad (i = 1,2,\cdots,n) .$$

显然, $d_i : E_2 \to \mathbf{R}$ 连续、非负且在开球 $B(y_i, \varepsilon)$ 内为正. 令

$$d(y) = \sum_{k=1}^{n} d_k(y) \ (y \in E_2) ,$$

则当 $x \in D$ 时，必有某个 y_i 使得 $\|Ax - y_i\| < \varepsilon$，从而 $d_i(Ax) > 0$. 因此

$$d(Ax) > 0 \ (x \in D).$$

令

$$A_\varepsilon x = \frac{1}{d(Ax)} \sum_{i=1}^{n} d_i(Ax) y_i ,\quad \forall x \in D .$$

则 $A_\varepsilon : D \to E_\varepsilon$ 连续. 由于当 $\| Ax - y_i \| \ge \varepsilon$ 时，$d_i(Ax) = 0$，因此，当 $x \in D$ 有

$$\begin{aligned} \|Ax - A_\varepsilon x\| &= \left\| \frac{1}{d(Ax)} \sum_{i=1}^{n} d_i(Ax)(Ax - y_i) \right\| \\ &\le \frac{1}{d(Ax)} \sum_{i=1}^{n} d_i(Ax) \|Ax - y_i\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $A(D)$ 列紧，故 $A(D)$ 有界. 从而存在 $M > 0$ 使得

$$\|Ax\| \le M \ (\forall x \in D).$$

由以上不等式可知

$$\|A_\varepsilon x\| \le \|A_\varepsilon x - Ax\| + \|Ax\| < \varepsilon + M,\quad \forall x \in D.$$

因此，$A_\varepsilon(D)$ 是有界集，故 A_ε 是有界算子.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 由(ii)可知，存在连续且有界算子 $B_n : D \to H_n$ 使得

$$\|Ax - B_n x\| < \frac{1}{2^{n+2}},\quad \forall x \in D,\quad n = 0,1,2,\cdots,$$

其中 $H_n\ (n = 0,1,2,\cdots)$ 是 E_2 的有限维子空间. 令

$$A_0 = B_0,\quad E_0^{(0)} = H_0,$$

$$A_n = B_n - B_{n-1}\ (n = 1,2,\cdots),$$

$$E_n^{(0)} = \{x - y \mid x \in H_n, y \in H_{n-1}\}(n = 1,2,\cdots).$$

显然，$\dim E_n^{(0)} < \infty$，$A_n : D \to E_n^{(0)}\ (n = 0,1,2,\cdots)$ 连续且有界. 由于

$$B_n x = \sum_{i=0}^{n} A_i x\ (\forall x \in D),$$

从而对于任意 $x \in D$ 有

$$\left\|Ax - \sum_{i=0}^{n} A_i x\right\| = \|Ax - B_n x\| < \frac{1}{2^{n+2}}(n = 0,1,2,\cdots).$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x$ 在 D 上一致收于 Ax，即 $Ax = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x$ 在 D 上一致成立. 最后，$\forall x \in D$，有

$$\begin{aligned}\|A_n x\| &= \|B_n x - B_{n-1} x\| \\ &\le \|B_n x - Ax\| + \|Ax - B_{n-1} x\| \\ &< \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}\ (n = 1,2,\cdots).\end{aligned}$$

(iii)$\Rightarrow$(i) 设(iii)满足. 对任意的 $\varepsilon > 0$，取自然数 n_0 使得 $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. 令

$$B_{n_0} = \sum_{i=0}^{n_0} A_i,$$

则 $B_{n_0} : D \to G_{n_0}$ 连续且有界算子,其中

$$G_{n_0}=\left\{\sum_{i=0}^{n_0} y_i \mid y_i\in E_i^{(0)}\ (0\le i\le n_0)\right\}$$

是E_2的有限维子空间．当$x\in D$时，有

$$\left\|Ax-B_{n_0}x\right\|=\left\|\sum_{i=n_0+1}^{\infty}A_ix\right\|\le\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon .$$

故$B_{n_0}(D)$是$A(D)$的ε-网．又$B_{n_0}(D)$是有限维空间G_{n_0}中的有界集，从而是列紧集(定理 1.2.4)．再由定理 1.1.18 的推论 1 知$A(D)$是列紧集． 设S为D的任一有界子集， 则$A(S)$是列紧集$A(D)$的子集，从而列紧，因此A是紧算子．由于A_n连续且$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx$在D上一致收敛于Ax，则用类似于数学分析中的方法可证A也连续．故A是全连续的．证毕．

如果算子$A:D\to E_2$的值域$A(D)$能包含在E_2的某个有限维子空间之中，则称算子A是有限维算子．显然，连续且有界的有限维算子必有是全连续的．定理 3.2.4 告诉我们：全连续算子可用连续、有界的有限维算子列一致逼近．

最后，再介绍一个重要例子．

例 1 设函数$f:[a,b]\times(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$连续且有连续的偏导数，令

$$D=\{\varphi\in C^1[a,b]:\|\varphi'\|\le 1\}\subset C[a,b]$$

定义

$$(F\varphi)(x)=f(x,\varphi(x)),\quad \forall\varphi\in D,$$

则$F:D\to C[a,b]$全连续．

证明 由定理 3.1.3 知$F:C[a,b]\to C[a,b]$连续且有界，从而限制在D上，F也是连续且有界的．如果$S\subset D$是有界集，则$F(S)$是$C[a,b]$中的有界集，下面证明$F(S)$等度连续(定理 1.1.18 的推论 3)．$\forall\varphi\in S$及$x_1,x_2\in[a,b]$，应用微分中值定理可知，

$$|(F\varphi)(x_2)-(F\varphi)(x_1)|=|(F\varphi)'(\xi)|\cdot|x_2-x_1|.$$

其中ξ位于x_1与x_2之间．由于S有界，从而存在$M>0$使得

$$\forall\varphi\in S,\ |\varphi(x)|\le M\ (x\in[a,b]).$$

又因为f在$[a,b]\times[-M,M]$上偏导连续，于是存在$K>0$使得

$$|f_x(x,\varphi(x))|\le K,\ |f_y(x,\varphi(x))|\le K,\quad \forall x\in[a,b],$$

从而$\forall\varphi\in S$，有

$$|(F\varphi)'(\xi)|=|f_x(\xi,\varphi(\xi))+f_y(\xi,\varphi(\xi))\varphi'(\xi)|\le 2K,$$

因此，$\forall \varphi \in S$ 及 $\forall x_2, x_1 \in [a,b]$，有

$$|(F\varphi)(x_2)-(F\varphi)(x_1)| \le 2K \cdot |x_2 - x_1|$$

由此可知 $F(S)$ 等度连续. 因此 $F(S)$ 是 $C[a,b]$ 中的列紧集，从而 F 是紧算子. 故 F 是全连续的.

习题 3.2

1．设 $A: D \to E_2$ 是有限维算子，证明：

(1) A 是紧算子 $\Leftrightarrow$ A 有界；

(2) A 全连续 $\Leftrightarrow$ A 连续且有界.

2．设 $A: D \to E_2$，$B: E_2 \to E_3$ 是两个算子，证明：若 A 全连续且 B 连续，则 $BA: D \to E_3$ 全连续. 若 A 连续且有界，而 B 全连续，则 BA 全连续.

3．若算子 $A, B: D \to E_2$ 全连续，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \alpha A + \beta B$ 也是全连续的.

4．若算子 $A_n: D \to E_2$ 是紧算子 $(n=1,2,\cdots)$，$A: D \to E_2$ 满足：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \| A_n x - Ax \| = 0,$$

证明：A 是紧算子.

5．设 $K(x,y,u):[a,b]\times[a,b]\times(-\infty,\infty) \to \mathbf{R}^1$ 连续，定义

$$(T\varphi)(x) = \int_a^b K(x,y,\varphi(y))dy, \quad \forall \varphi \in C[a,b].$$

证明：T 是 $C[a,b]$ 到自身的全连续算子.

§3.3 抽象函数的导数

设 E 是 Banach 空间，$D \subset \mathbf{K} = \mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$，则称任一算子 $A: D \to E$ 为抽象函数. 如果 $D \subset \mathbf{R}$，则称 A 是实变抽象函数；如果 $D \subset \mathbf{C}$，则称 A 是复变抽象函数. 本节将实变、复变函数的导数概念推广到一般抽象函数.

3.3.1 实变抽象函数的导数

本节恒设 E 是实的 Banach 空间，$[a,b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间.

定义 3.3.1 设 $x:[a,b] \to E$，$t_0 \in [a,b]$. 如果 $\exists y_0 \in E$ 使得

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\| \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} - y_0 \right\| = 0,$$

则称抽象函数 x 在 t_0 点可微或可导，且称 y_0 是 x 在 t_0 处的导数，记为 $x'(t_0)$，即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

若x在$[a,b]$的每个点可微（在a右可微，b点左可微），则称x在$[a,b]$上可微，此时,称函数$t\mapsto x'(t):[a,b]\to E$是$x$的导函数，它是一个新的抽象函数. 因此，还可定义$x$的二阶导数$x''(t)=(x'(t))'$，等等. 一般地$x$在$t_0$处的$n$阶导数定义为

$$x^{(n)}(t_0)=[x^{(n-1)}(t)]'_{t=t_0}.$$

定理 3.3.2 设$x,y:[a,b]\to E$是实变抽象函数.

(i) 若x在$t_0\in[a,b]$可微，则x在t_0连续;

(ii) 若x,y在$t_0\in[a,b]$可微，定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$

则$x+y$在t_0可微且$(x+y)'(t_0)=x'(t_0)+y'(t_0)$;

(iii) 若E是实 Banach 代数，且x,y在$t_0\in[a,b]$处可微，则

$$(xy)(t)=x(t)y(t)$$

在t_0处可微且

$$(xy)'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0);$$

(iv) 若x在$[a,b]$上连续、在(a,b)内可微，则存在$\xi\in(a,b)$使得

$$\|x(b)-x(a)\|\le\|x'(\xi)\|(b-a);$$

(v) 若x在$t_0\in[a,b]$可微，则$\forall f\in E^*$，有

$$f\circ x:[a,b]\to\mathbf{R}$$

在t_0处可微且$(f\circ x)'(t_0)=f(x'(t_0))$.

证明 (i) 设$t_n\in[a,b](n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t(t_n\ne t)$，则

$$\begin{aligned}\|x(t_n)-x(t_0)\|&=\left\|\frac{x(t_n)-x(t_0)}{t_n-t_0}\right\|\cdot|t_n-t_0|\\&\to\|x'(t_0)\|\cdot 0=0(n\to\infty).\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n)=x(t_0)$. 故$x$在$t_0$处连续.

(ii) 因为当$\Delta t\to 0$时,有

$$\left\|\frac{(x+y)(t_0+\Delta t)-(x+y)(t_0)}{\Delta t}-(x'(t_0)+y'(t_0))\right\|$$

$$\leq \left\| \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0) \right\| + \left\| \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t} - y'(t_0) \right\|$$
$$\to 0,$$

从而 $x+y$ 在 t_0 可微且 $(x+y)'(t_0)=x'(t_0)+y'(t_0)$.

(iii) 记

$$\alpha = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0), \quad \beta = \frac{y(t_0+\Delta t)-y(t_0)}{\Delta t} - y'(t_0),$$

则由(i)知:当 $\Delta t \to 0$ 时,有

$$\left\| \frac{(xy)(t_0+\Delta t)-(xy)(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0)y(t_0) - x(t_0)y'(t_0) \right\|$$
$$\leq \|\alpha y(t_0+\Delta t)+x(t_0)\beta\| + \|x'(t_0)[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)]\|$$
$$\leq \|\alpha\|\cdot\|y(t_0+\Delta t)\| + \|\beta\|\cdot\|x(t_0)\| + \|x'(t_0)\|\cdot\|y(t_0+\Delta t)-y(t_0)\|$$
$$\to 0.$$

故 xy 在 t_0 处可微，且

$$(xy)'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0).$$

(iv) 由 Hahn-Banach 定理知：存在 $f \in E^*$ 使 $\| f \|=1$ 且

$$f(x(b)-x(a)) = \|x(b)-x(a)\|,$$

令 $g(t)=f(x(t))$ ，则 g 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 由可微．由数学分析中的中值定理可知：存在 $\xi \in (a,b)$ ，使得

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)\cdot(b-a).$$

易见 $g'(\xi)=f(x'(\xi))$ ，从而

$$\begin{aligned} \| x(b)-x(a) \| &= g(b)-g(a) \\ &= f(x'(\xi))(b-a). \\ &\leq \| x'(\xi) \| \cdot (b-a). \end{aligned}$$

(v) 显然．证毕.

定理 3.3.3 设

$$x(t)=(h_1(t),h_2(t)),$$

其中 $h_1,h_2:[a,b]\to \mathbf{R}$ ，则 $x:[a,b]\to \mathbf{R}^2$ 在 $t_0\in[a,b]$ 可微当且仅当 h_1 与 h_2 在 t_0 可微；此时， $x'(t_0)=(h_1'(t_0),h_2'(t_0))$.

证明 ($\Rightarrow$) 设 x 在 t_0 可微，且 $x'(t_0)=(A,B)$ ，则由定理 3.3.2 (v)知：

$\forall f=(\alpha,\beta)\in(\mathbf{R}^2)^*$，$f\circ x$ 在 t_0 可微且

$$(f\circ x)'(t_0)=f(x'(t_0))=f(A,B)=\alpha A+\beta B.$$

取 $f=(1,0)$ 知 $h_1(t)=f(x(t))$ 在 t_0 可微且 $h'(t_0)=A$. 同理 $h_2(t)$ 在 t_0 处可微且 $h_2'(t_0)=B$.

($\Leftarrow$) 这时，当 $\Delta t\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}\\&=\left(\frac{h_1(t_0+\Delta t)-h_1(t_0)}{\Delta t},\frac{h_2(t_0+\Delta t)-h_2(t_0)}{\Delta t}\right)\\&\to(h_1'(t_0),h_2'(t_0)).\end{aligned}$$

故 x 在 t_0 处可微且 $x'(t_0)=(h_1'(t_0),h_2'(t_0))$. 证毕.

例1 设 $x(t)=(t^2,\sin t)$，则 $x:[a,b]\to\mathbf{R}^2$ 可微且

$$x'(t)=(2t,\cos t)\ (a\le t\le b).$$

设 $y(t)=(|t|,t^3)$，则 y 在 $t_0=0$ 处不可微.

3.3.2 复变抽象函数的导数

设 G 是复平面上 $\mathbf{C}$ 上的非空开集，E 是复 Banach 空间，$x:G\to E$ 是复变抽象函数.

定义 3.3.4 设 $\lambda_0\in G$. 如果存在 $y_0\in E$ 使得

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0}\left\|\frac{x(\lambda_0+\Delta\lambda)-x(\lambda_0)}{\Delta\lambda}-y_0\right\|=0,$$

则称 x 在 λ_0 处可微且称 y_0 为 x 在 λ_0 处的导数，记为 $x'(\lambda_0)$，即

$$x'(\lambda_0)=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{x(\lambda_0+\Delta\lambda)-x(\lambda_0)}{\Delta\lambda}.$$

如果 x 在 G 内每一点都可微，则称 x 在 G 内解析.

显然，复变抽象函数也具有类似于定理 3.3.2 中的性质，但性质(iv)不再有，因复变函数中没有中值定理，又(iii)中的 E 应为复 Banach 代数. 特别，若 $x:G\to E$ 解析，则 $\forall f\in E^*$，

$$f\circ x:G\to C$$

是通常的解析函数，且 $(f\circ x)'(\lambda)=f(x'(\lambda))$，$\forall\lambda\in G$. 由此可证，抽象解析函数具有通常解析函数的许多性质. 下面的刘维尔(Liouville)定理就是一例.

定理 3.3.5 (Liouville) 若 $x:\mathbf{C}\to E$ 解析且 $x(\mathbf{C})$ 有界，则 x 必为常值函数，即存在 $y_0\in E$，使得 $x(\lambda)=y_0(\forall\lambda\in\mathbf{C})$.

证明 任取 $f\in E^*$，则 $f\circ x:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 解析，从而是一个整函数且有界．由复变函数论中的相应定理知：存在复常数 λ_0 使得

$$(f\circ x)(\lambda)=f(x(\lambda))\equiv\lambda_0,\quad \forall\lambda\in\mathbf{C}.$$

从而

$$f(x(\lambda)-x(0))\equiv 0,\quad \forall\lambda\in\mathbf{C},\quad \forall f\in E^*.$$

由定理 2.2.6 知 $x(\lambda)-x(0)\equiv 0$，即 $x(\lambda)\equiv x(0)$，$\forall\lambda\in\mathbf{C}$．证毕.

应用以上的 Liouville 定理，可以证明算子谱论中的一个重要定理，即

定理 3.3.6 设 X 是复 Banach 空间且 $X\neq\{0\}$，$T\in B(X)$，则

(i) $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid(\lambda I-T)^{-1}$ 存在且有界$\}$是 $\mathbf{C}$ 中的开子集；

(ii) $\phi:\lambda\mapsto R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$ 是 $\rho(T)$ 到 $B(X)$ 中的抽象解析函数，且

$$\phi'(\lambda)=\frac{dR_\lambda}{d\lambda}=-(R_\lambda)^2,\quad \forall\lambda\in\rho(T);$$

(iii) $\sigma(T)=\rho(T)^C=\mathbf{C}\setminus\rho(T)$ 非空.

证明 (i) 设 $\lambda_0\in\rho(T)$，算子 $S_0=\lambda_0 I-T$ 有有界逆算子．由定理 2.5.3 的推论 1 可知：当 $S\in B(X)$ 且

$$\|S-S_0\|<\|S_0^{-1}\|^{-1}$$

时，S 有有界逆算子．由于当 $|\lambda-\lambda_0|<\|S_0^{-1}\|^{-1}$ 时，

$$\|(\lambda I-T)-S_0\|=|\lambda-\lambda_0|<\|S_0^{-1}\|^{-1}.$$

因此，$\lambda I-T$ 有有界逆算子，从而 $\lambda\in\rho(T)$．可见 λ_0 为 $\rho(T)$ 的内点．故 $\rho(T)$ 是开集.

(ii) 设 $\lambda_0\in\rho(T)$，$S_0=\lambda_0 I-T$，则由(i)的证明与定理 2.5.3 的推论 1 可知当 $|\lambda-\lambda_0|<\|S_0^{-1}\|^{-1}$ 时，

$$R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}{}^{n+1}.$$

于是，当 $|\lambda-\lambda_0|<\|S_0^{-1}\|^{-1}=\|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ 时，

$$\left\|\frac{R_\lambda-R_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}+R_{\lambda_0}^2\right\|\leq\sum_{n=2}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^n\left\|R_{\lambda_0}\right\|^{n+1}$$

$$=\frac{|\lambda-\lambda_0|^2\|R_{\lambda_0}\|^3}{1-|\lambda-\lambda_0|\cdot\|R_{\lambda_0}\|}.$$

因此,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\|\frac{R_\lambda-R_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}-(-R_{\lambda_0}^2)\right\|=0.$$

故$\phi(\lambda)=R_\lambda$在λ_0处可微且$\phi'(\lambda_0)=-R_\lambda^2$. 这就证明了$\varphi$在$\rho(T)$内解析且

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda}=-R_\lambda^2\ (\lambda\in\rho(T)).$$

(iii) 假设$\sigma(T)=\varnothing$，则$\rho(T)=\mathbf{C}$. 由（iii）知$\phi(\lambda)=R_\lambda$在整个平面上解析. 下证$\phi(\mathbf{C})$有界. 当$|\lambda|>\|T\|+1$时，有$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|<1$. 所以,由定理 2.5.3 知

$$\|\phi(\lambda)\|=\|\lambda^{-1}(I-\lambda^{-1}T)^{-1}\|\le\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}<1.$$

又因为$\phi:D=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,|\lambda|\le\|T\|+1\}\to B(X)$连续且$D$是$\mathbf{C}$中的紧子集, 所以由定理 3.1.2 知$\phi$有界，从而存在$M>0$，使得当$|\lambda|\le\|T\|+1$时，有

$$\|\phi(\lambda)\|\le M.$$

故$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，$\|\phi(\lambda)\|\le 1+M$. 由 Liouville 定理(定理 3.3.5)知：存在$A\in B(X)$使得：$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，$\phi(\lambda)\equiv A$. 由上面的估计可知

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\|\phi(\lambda)\|=0,$$

因此，$A=0$,即$(\lambda I-T)^{-1}=0\ (\forall\lambda\in\mathbf{C})$. 从而

$$I=(\lambda I-T)^{-1}(\lambda I-T)=0.$$

这也就是说：$\forall x\in X$，$x=Ix=0x=0$，这与$X\ne\{0\}$矛盾. 证毕.

定理 3.3.6 中给出的复数集

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,(\lambda I-T)^{-1}\text{存在且有界}\}$$

与

$$\sigma(T)=\mathbf{C}\setminus\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\lambda I-T\text{无有界逆算子}\}$$

分别称为算子$T\in\mathcal{B}(X)$的正则集与谱. 由定理 2.5.3 的推论 2 知当$|\lambda|>\|T\|$时，$\lambda\in\rho(T)$，从而$\sigma(T)$是有界闭集. 因此$\sigma(T)$是复平面$\mathbf{C}$的非空紧子集，而$\rho(T)$是无界开集.

习题 3.3

1.设 $x:[a,b]\to E$ 在 t_0 处可微，则 $\forall T\in \mathrm{B}(E,F)$，$T\circ x:[a,b]\to F$ 也在 t_0 可微且

$$(T_0x)'(t_0)=Tx'(t_0).$$

2.设 $x:[a,b]\to E$ 有连续的 $n+1$ 阶导数，则 $\forall t,t_0\in(a,b)$ 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\left\|x(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k\right\|$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\|x^{(n+1}(\xi)\|\cdot|t-t_0|^{n+1}.$$

3. 设 $x(t)=(t,t^2,t^3)$ $(a\le t\le b)$，证明：$x:[a,b]\to\mathbf{R}^3$ 可微且

$$x'(t)=(1,2t,3t^2),\forall t\in[a,b].$$

4. 设 $G\subset\mathbf{C}$ 是非空开集，

$$x(\lambda)=(h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_n(\lambda))$$

其中 $\lambda\in G$，$h_i(\lambda)$ $(1\le i\le n)$ 是 G 上定义的复值函数．证明：x 在 $\lambda_0\in G$ 处可微且 $x'(\lambda_0)=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 当且仅当每个 $h_i:G\to C$ 可微且

$$h_i'(\lambda_0)=A_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

§3.4 抽象函数的积分

3.4.1 定义

本节设 E 是 Banach 空间．

定义 3.4.1 设 $x:[a,b]\to E$ 是一实变抽象函数，对 $[a,b]$ 的任一分划 $T=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$，其中

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=b.$$

记

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1,2,\cdots,n),\ \|T\|=\max_{1\le i\le n}\Delta t_i.$$

任取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，作积分和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i.$$

若当$\|T\| \to 0$时，有$\|\sigma - I\| \to 0$，其中$I \in E$与分划T及点ξ_i(叫介点)的选取都无关，则称x在$[a,b]$上 Riemann 可积，简称可积，且称元素$I \in E$是x在$[a,b]$上的 Riemann 积分，简称积分，记为$\int_a^b x(t)dt$，即

$$\int_a^b x(t)dt = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n} x(\xi_k)\Delta t_k .$$

3.4.2 可积条件

由于抽象函数x的函数值$x(t)$是一般向量，没有大、小关系，故不能像数学分析中那样，用大和、小和的方法讨论抽象函数的可积性．下面的定理是判别可积性的一个较好方法，它类似于极限理论中的 Cauchy 准则．

定理 3.4.2 抽象函数$x:[a,b] \to E$可积当且仅当对任意的$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$使得对$[a,b]$任意两个分划$T_1$与$T_2$，当$\|T_1\| < \delta$且$\|T_2\| < \delta$时，$x$关于$T_1$与$T_2$的任意积分和$\sigma_1$与$\sigma_2$都满足$\|\sigma_1 - \sigma_2\| < \varepsilon$．

证明 ($\Rightarrow$) 设$I = \int_a^b x(t)dt$，则任意的$\varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$使得对$[a,b]$的任一分划T，只要$\|T\| < \delta$，就有$\|\sigma - I\| < \frac{\varepsilon}{2}$，其中$\sigma$是$x$关于$T$的任一积分和．于是，当$\|T_1\| < \delta$，$\|T_2\| < \delta$时，$x$关于$T_1$与$T_2$的任意积分和$\sigma_1$与$\sigma_2$满足

$$\begin{aligned} \|\sigma_1 - \sigma_2\| &\le \|\sigma_1 - I\| + \|I - \sigma_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 用$T^{(n)}$表示区间$[a,b]$的n等分分划，取介点为右端点并作积分和$\sigma^{(n)}$ $(n = 1,2,\cdots)$．显然，

$$\|T^{(n)}\| = \frac{b-a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

从而由假定知：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当$m, n > N$时，有

$$\|\sigma^{(m)} - \sigma^{(n)}\| < \varepsilon .$$

由此可见，积分和列$\{\sigma^{(n)}\}$是 Banach 空间E中的基本列．于是存在$I \in E$使得$\lim_{n \to \infty}\|\sigma^{(n)} - I\| = 0$．

由假定知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使得对$[a,b]$任意两个分划T_1与T_2，当$\|T_1\|<\delta$且$\|T_2\|<\delta$时，x关于T_1与T_2的任意积分和σ_1与σ_2都满足

$$\|\sigma_1-\sigma_2\|<\varepsilon.$$

现在任取$[a,b]$的一个分划T，使得$\|T\|<\delta$. 再取自然数n使得$\|T^{(n)}\|<\delta$. 于是，对x关于T所做的任一积分和σ,都有

$$\|\sigma-\sigma^{(n)}\|<\varepsilon,$$

因此

$$\|\sigma-I\|\le\|\sigma-\sigma^{(n)}\|+\|\sigma^{(n)}-I\|<2\varepsilon.$$

故$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\|\sigma-I\|=0$. 这就证明了$x$在$[a,b]$可积且$\int_a^b x(t)dt=I$.

定理 3.4.2 若x在$[a,b]$可积，则x在$[a,b]$上有界.

证明 设$\int_a^b x(t)dt=I$，则由假定可知：对$\varepsilon=1$，存在$[a,b]$的分划

$$T=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$$

使得x关于T的任一积分和σ满足$\|\sigma-I\|<1$，从而

$$\|\sigma\|\le 1+\|I\|.$$

另一方面，若x在$[a,b]$上无界，则x必在某个子区间$[t_{k-1},t_k]$上无界. 任取

$$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]\ (i\ne k),$$

记

$$G=\left\|\sum_{i\ne k}x(\xi_i)\Delta t_i\right\|.$$

由于x在$[t_{k-1},t_k]$上无界，则$\forall M>0$，存在$\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$使得

$$\|x(\xi_k)\|>\frac{M+G}{\Delta t_k}.$$

于是，积分和$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$ 满足

$$\|\sigma\|\ge\|x(\xi_k)\Delta t_k\|-\left\|\sum_{i\ne k}x(\xi_i)\Delta t_i\right\|>M.$$

从而$M<\|I\|+1\quad(\forall M>0)$，这显然不可能. 因此$x$必有界. 证毕.

注 定理 3.4.2 的逆不成立. 例如，Dirichlet 函数

$$\chi_{\mathbf{Q}}:[a,b]\to\mathbf{R}$$

有界但不可积.

下面的定理给出了可积的一个充分条件.

定理 3.4.3 若 $x:[a,b]\to E$ 连续，则 x 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 由于 x 在 $[a,b]$ 上连续，则一致连续(习题 3.1.7). 因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $t',t''\in[a,b]$ 且满足 $|t'-t''|<\delta$ 时，恒有

$$\left\|x(t')-x(t'')\right\|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

设 T_1,T_2 是 $[a,b]$ 的两个分划, 且 $\|T_1\|<\delta$，$\|T_2\|<\delta$. 对 x 关于 T_1,T_2 的任意积分和 σ_1,σ_2，记

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i.$$

设 T_3 是 T_1 与 T_2 的合并，视 T_3 是在 T_1 的基础上，再将 $[t_{i-1},t_i]$ 划分为:

$$t_{i-1}=t_{i,0}<t_{i,1}<\cdots<t_{i,k_i}=t_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

令

$$\sigma_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}x(t_{i,j})(t_{i,j}-t_{i,j-1}),$$

则 σ_3 是 x 关于 T_3 的一个积分和, 且

$$\begin{aligned}\left\|\sigma_1-\sigma_3\right\|&=\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}[x(\xi_i)-x(t_{i,j})](t_{i,j}-t_{i,j-1})\right\|\\&\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\left\|x(\xi_i)-x(t_{i,j})\right\|(t_{i,j}-t_{i,j-1})\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}(t_{i,j}-t_{i,j-1})\\&=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

同理可得 $\|\sigma_2-\sigma_3\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 故

$$\left\|\sigma_1-\sigma_2\right\|\le\left\|\sigma_1-\sigma_3\right\|+\left\|\sigma_3-\sigma_2\right\|<\varepsilon.$$

因此,由定理 3.4.1 可知: x 在 $[a,b]$ 上可积.

3.4.3 运算性质

定理 3.4.4 设 $x, x_1, x_2:[a,b]\to E$ 连续，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则

(i) $\alpha x_1+\beta x_2$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b(\alpha x_1+\beta x_2)(t)dt=\alpha\int_a^b x_1(t)dt+\beta\int_a^b x_2(t)dt;$$

(ii) $\|x(\cdot)\|$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\le\int_a^b\|x(t)\|dt;$

(iii) $\forall f\in E^*$, $f\circ x$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x(t))dt=f(\int_a^b x(t)dt);$$

(iv) $\forall c\in(a,b)$ 有

$$\int_a^b x(t)dt=\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt\ .$$

证明 (i)-(iii)显然．下证(iv)．任取 $f\in E^*$，由(iii)及定积分的相应性质知

$$\begin{aligned}f(\int_a^b x(t)dt)&=\int_a^b f(x(t))dt\\&=\int_a^c f(x(t))dt+\int_c^b f(x(t))dt\\&=f(\int_a^c x(t)dt)+f(\int_c^b x(t)dt)\\&=f(\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt).\end{aligned}$$

所以,由定理 2.2.6 可知

$$\int_a^b x(t)dt=\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt\ .$$

定理 3.4.5 (i) 若 $t\mapsto x'(t):[a,b]\to E$ 连续，则

$$\int_a^b x'(t)dt=x(b)-x(a);$$

(ii) 若 $x:[a,b]\to E$ 连续，则

$$y(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau\ (a\le t\le b)$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$y'(t)=x(t)\ (a\le t\le b)\ .$$

证明 (i) $\forall f\in E^*$, $(f\circ x)'(t):[a,b]\to\mathbf{R}$ 连续．由 Newton-Leibnitz 公式可

知:

$$f(\int_a^b x'(t)dt) = \int_a^b f(x'(t))dt$$
$$= \int_a^b (f \circ x)'(t)dt$$
$$= f(x(b)) - f(x(a))$$
$$= f(x(b) - x(a)).$$

从而,由定理 2.2.6 知:

$$\int_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a).$$

(ii) 由于 x 在 $[a,b]$ 上连续，从而 $\forall t_0 \in [a,b]$ 及 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$, 使得当 $t \in [a,b]$ 且 $|t - t_0| < \delta$ 时，恒有

$$\| x(t) - x(t_0) \| < \varepsilon.$$

于是，当 $0 < |\Delta t| < \delta$ 时，由定理 3.4.4(ii)知:

$$\left\| \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} - x(t_0) \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [x(\tau) - x(t_0)] d\tau \right\|$$
$$\le \frac{1}{|\Delta t|} \int_{t_0}^{t_0+|\Delta t|} \| x(\tau) - x(t_0) \| d\tau$$
$$\le \frac{1}{|\Delta t|} \int_{t_0}^{t_0+|\Delta t|} \varepsilon \, d\tau$$
$$= \varepsilon.$$

这说明

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{y(t_0 - \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} - x(t_0) \right\| = 0.$$

因此，y 在 t_0 可微且 $y'(t_0) = x(t_0)$.

习题 3.4

1. 设 $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ 连续，

$$x(t) = (h_1(t), h_2(t)),$$

证明: x 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b x(t)dt = \left(\int_a^b h_1(t)dt, \int_a^b h_2(t)dt \right).$$

2. 设 $0 \le t \le 1$，并且

$$x(t)=(t,t^2,t^3,\cdots,t^n).$$

证明:函数 $x:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 可积并求其积分.

3. 设$x:[a,b]\to E$可积，定义

$$y(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau\text{，其中}a\le t\le b.$$

证明: $y:[a,b]\to E$连续(其中$y(a)=0$).

(注. 要证y在$[a,b]$上有定义即x在$[a,b]$上可积).

4. 设$x:[a,b]\to E$连续，证明：存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\left\|\int_a^b x(t)dt\right\|\le\|x(\xi)\|(b-a).$$

5. 设$x_n:[a,b]\to E$连续$(n=1,2,\cdots)$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n(t)$依$E$中的范数在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k(t)-x(t)\right\|=0.$$

证明$x:[a,b]\to E$连续，且$\int_a^b x(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b x_n(t)dt$.

§3.5 Fréchet 导算子

3.5.1 定义与性质

在§3.3中，我们将普通导数的概念推广到了实变（或复变）抽象函数的情况. 为了进一步将导数的概念推广到一般算子上来，我们先回顾一下分析中的全微分概念.

设$f(x,y)$是区域$D\subset\mathbf{R}^2$上的二元函数，(x_0,y_0)为D的内点. 如果存在仅与点$X_0=(x_0,y_0)$有关的常数α,β使得

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\alpha h+\beta k+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right),\tag{3.5.1}$$

则称f在X_0处可微，并称$\alpha h+\beta k$为f在X_0处关于(h,k)的全微分.

如果将f看作点$X=(x,y)$的函数，记$B=(\alpha,\beta)$并将B看作由$\mathbf{R}^2$到$\mathbf{R}$的有界线性算子，再记$\Delta X=(h,k)$则(3.5.1)式可改写为:

$$f(X_0+\Delta X)-f(X_0)=B\Delta X+o(\|\Delta X\|),\tag{3.5.2}$$

即

$$\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\|f(X_0+\Delta X)-f(X_0)-B\Delta X\|}{\|\Delta X\|}=0 \tag{3.5.3}$$

其中分子上的范数是 $\mathbf{R}$ 中的范数，即绝对值 $|\cdot|$，而分母上的是 $\mathbf{R}^2$ 中的范数 $\|\cdot\|_2$. 由于 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}$ 的任一有界线性算子(即泛函)都有形式 $B=(\alpha,\beta)$. 从而, f 在 X_0 可微等价于存在从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}$ 的有界线性算子 B 使得(3.5.2)即(3.5.3)成立; 这时, f 在 X_0 处关于 ΔX 的全微分为

$$d[f(X_0)\Delta X]=B\Delta X,$$

其中，算子 B 可表示为

$$B=(f_x(X_0),f_y(X_0))=\text{grad } f(X_0) \text{（梯度）}.$$

由此很容易将全微分的概念推广到一般算子上来．本节中 Banach 空间 E_1, E_2, E_3 等的数域均为实数域.

定义 3.5.1 设 E_1, E_2 是 Banach 空间，D 是 E_1 中的非空开集，算子

$$A:D\to E_2,\quad x_0\in D.$$

如果存在 $B\in B(E_1,E_2)$，使得当 $\|h\|$ 充分小时,

$$A(x_0+h)-Ax_0=Bh+\omega(x_0,h), \tag{3.5.4}$$

其中 $\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$，即

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0, \tag{3.5.5}$$

则称算子 A 在 x_0 处 Fréchet 可微（简称 $F-$可微），Bh 叫做 A 在 x_0 处关于 h 的 Fréchet 微分，记为 $d[A(x_0)h]$；算子 B 称为算子 A 在 x_0 处的 Fréchet 导算子(简称为 F -导算子)，记为 $A'(x_0)$ ．于是,(3.5.4)式变为

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h). \tag{3.5.6}$$

其中 $\omega(x_0,h)$ 满足(3.5.5)式，即

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|}{\|h\|}=0, \tag{3.5.7}$$

且还有 $d[A(x_0)h]=A'(x_0)h$.

显然，当 E_1 是数域 $\mathbf{K}$ 时，算子 A 就是抽象函数 x，而(3.5.7)式变为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-x'(t_0)\right\|=0.$$

因此，现在的 F-导算子与§3.3 中定义的抽象函数的导数是一致的.

Fréchet 导算子有类似于导数的许多性质.

定理 3.5.2 (i) 若 $A:D\to E_2$ 在 $x_0\in D$ 处 F-可微，则 A 在 x_0 处 F-导算子必唯一;

(ii) 若算子 $A_1,A_2:D\to E_2$ 都在 $x_0\in D$ 处 F-可微，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，算子 $\alpha A_1+\beta A_2:D\to E_2$ 也在 x_0 处 F-可微且有

$$(\alpha A_1+\beta A_2)'(x_0)=\alpha A_1'(x_0)+\beta A_2'(x_0);$$

(iii) 若算子 $A\in B(E_1,E_2)$，则 A 在 E_1 中任一点处 F-可微且

$$A'(x_0)=A,\quad \forall x_0\in E_1;$$

(iv) 若 $Ax\equiv y_0\quad(x\in E_1)$，则算子 A 在 E_1 中任一点 F-可微且

$$A'(x_0)=0,\quad \forall x_0\in E_1;$$

(v) 若算子 $A:D\to E_2$ 在 D 的点 x_0 处 F-可微，则 $\forall f\in E_2^*$，泛函 $f\circ A:D\to\mathbf{R}$ 也在点 x_0 处 F-可微且

$$(f\circ A)'(x_0)=f\circ A'(x_0).$$

证明 只证(i)与(v)，其余留作练习. 为证(i)，我们设 $B_1,B_2\in B(E_1,E_2)$ 都是 A 在 x_0 处的 F-导算子，即当 $\|h\|$ 很小时，

$$A(x_0+h)-Ax_0=B_ih+\omega_i(x_0,h)\ (i=1,2),$$

其中 $\lim\limits_{\|h\|\to0}\dfrac{\|\omega_i(x_0,h)\|}{\|h\|}=0\ (i=1,2)$. 因此,当 $\|h\|$ 很小时,

$$(B_1-B_2)h=\omega_2(x_0,h)-\omega_1(x_0,h).$$

从而 $\lim\limits_{\|h\|\to0}\dfrac{\|(B_1-B_2)h\|}{\|h\|}=0$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得当 $\|h\|<\delta$ 时，有

$$\|(B_1-B_2)h\|\le\varepsilon\|h\|.$$

$\forall x\in E_1\setminus\{0\}$，令 $h=\dfrac{\delta}{2\|x\|}x$，则 $\|h\|<\delta$，从而

$$\left\|(B_1-B_2)\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\|\le\varepsilon\left\|\frac{\delta}{2\|x\|}x\right\|.$$

因此

$$\|(B_1-B_2)x\|\le\varepsilon\|x\|,\quad \forall x\in E_1.$$

故$\|B_1 - B_2\| \le \varepsilon$. 由于$\varepsilon > 0$可任意小，于是$B_1 - B_2 = 0$，即$B_1 = B_2$. 因此，(i)得证. 下面证(v). 由于$A$在$x_0 \in D$处$F$-可微，从而

$$A(x_0 + h) - Ax_0 = A'(x_0)h + \omega(x_0, h)$$

对$\|h\|$充分小的$h \in E_1$成立，其中$\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|} = 0$. 因此，对任意$f \in E_2^*$有当$\|h\|$充分小时，有

$$(f \circ A)(x_0 + h) - (f \circ A)x_0 = (f \circ A'(x_0))h + \omega_1(x_0, h),$$

其中$\omega_1(x_0, h) = f(\omega(x_0, h))$满足

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega_1(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0 .$$

由于$f \circ A'(x_0) \in B(E_1, \mathbf{K}) = E_1^*$，从而$f \circ A : D \to E_2$在$x_0$处$F$-可微，且

$$(f \circ A)'(x_0) = f \circ A'(x_0) .$$

证毕.

下面的定理指出了F-可微与普通可微的联系.

定理 3.5.3 设$f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$是三个二元函数，定义

$$Ax = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)), \quad \forall x \in \mathbf{R}^2,$$

则$A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$在$x_0$处$F$-可微当且仅当函数$f_1, f_2, f_3$在$x_0$处可微；此时，$\forall (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$,有

$$A'(x_0)(h_1, h_2) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}，\text{其中 } \alpha_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0} .$$

证明 ($\Rightarrow$) 设A在x_0处F-可微，则对

$$f = (1,0,0) \in (\mathbf{R}^3)^* = \mathbf{R}^3 ,$$

由定理 3.5.2（v）知：$f \circ A = f_1$在x_0处可微（这时, F-可微与通常可微一致）. 同理f_2, f_3也在x_0处可微.

($\Leftarrow$) 设f_1, f_2, f_3都在x_0处可微，则

$$f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right|_{x_0} h_1 + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right|_{x_0} h_2 + \omega_i(x_0, h) (i = 1,2,3)$$

其中

$$\frac{|\omega_i(x_0,h)|}{\|h\|} \to 0\ (\|h\| \to 0)\ (i=1,2,3).$$

于是

$$A(x_0+h)-Ax_0=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}+\omega(x_0,h),$$

这里

$$\alpha_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_0},\quad \omega(x_0,h)=(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

由于

$$\|\omega(x_0,h)\|=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\le\sum_{i=1}^{3}|\omega_i(x_0,h)|,$$

且 $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega_i(x_0,h)\|}{\|h\|}=0$，从而

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0.$$

定义

$$Bx=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \forall x\in(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,$$

则 $B\in B(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)$ 且满足

$$A(x_0+h)-Ax_0=Bh+\omega(x_0,h).$$

故 A 在 x_0 处 F -可微，且 $A'(x_0)=B$，即

$$A'(x_0)h=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix},\quad \forall h=(h_1,h_2)\in\mathbf{R}^2.$$

证毕．

由此可见：算子 A 的 F -导算子由 f_1,f_2,f_3 的 Jacobi 矩阵定义．由讨论过程可知：将 f_i 及 A 的定义域改为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集 D 且 $x_0\in D$ 时，结论亦真．

例 1 定义$A:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$如下：

$$Ax=(x_1x_2,x_1x_2x_3),\quad \forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3.$$

类似于定理 3.5.3 的方法，可证：A在任一点$x_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$处F-可微且

$$A'(x_0)h=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix},\quad \forall h=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbf{R}^3,$$

其中

$$\alpha_{ij}=\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_0},$$

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3.$$

于是

$$\alpha_{11}=x_2^0,\quad \alpha_{12}=x_1^0,\quad \alpha_{13}=0,$$

$$\alpha_{21}=x_2^0x_3^0,\quad \alpha_{22}=x_1^0x_3^0,\quad \alpha_{23}=x_1^0x_2^0.$$

若取$x_0=(1,1,1)$，则A在x_0处F-可微且满足：

$$A'(x_0)h=\begin{bmatrix}1&1&0\\ 1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix},\quad \forall h=(h_1,h_2,h_3)\in\mathbf{R}^3.$$

例 2 设$K(x,y,u)$与$\frac{\partial}{\partial u}K(x,y,u)=K_u(x,y,u)$都在区域

$$[a,b]\times[a,b]\times(-\infty,\infty)$$

上连续，定义

$$(A\varphi)(x)=\int_a^b K(x,y,\varphi(y))dy,\quad \forall\varphi\in C[a,b],$$

则A是$C[a,b]\to C[a,b]$的算子．$\forall\varphi_0\in C[a,b]$，定义

$$(Bh)(x)=\int_a^b K_u(x,y,\varphi_0(y))h(y)dy,\quad \forall h\in C[a,b].$$

易证$B\in B(C[a,b])$．下证A在φ_0处F-可微且$A'(\varphi_0)=B$．

对任意$h\in C[a,b]$,令

$$\alpha=K(x,y,\varphi_0(y)+h(y))-K(x,y,\varphi_0(y)),$$

则

$$
\begin{aligned}
&|A(\varphi_0+h)(x)-(A\varphi_0)(x)-(Bh)(x)| \\
&=\left|\int_a^b[\alpha-K_u(x,y,\varphi_0(y))h(y)]dy\right| \\
&=\left|\int_a^b[K_u(x,y,\varphi_0(y)+\theta h(y))-K_u(x,y,\varphi_0(y))]h(y)dy\right| \\
&\le\|h\|\cdot\int_a^b|K_u(x,y,\varphi_0(y)+\theta h(y))-K_u(x,y,\varphi_0(y))|dy .
\end{aligned}
$$

其中$0<\theta<1$．记$M=\|\varphi_0(y)\|+1$．由于$K_u(x,y,u)$在有界闭集

$$[a,b]\times[a,b]\times[-M,M]$$

上一致连续，从而知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $(\delta<1)$ 使得当$u_1,u_2\in[-M,M]$且$|u_1-u_2|<\delta$时，有

$$|K_u(x,y,u_1)-K_u(x,y,u_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

对一切$x,y\in[a,b]$成立．则当$h\in C[a,b]$且$0<\|h\|<\delta$时，有

$$|K_u(x,y,\varphi_0(y)+\theta h(y))-K_u(x,y,\varphi_0(y))|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

对于一切$x,y\in[a,b]$成立．故当$0<\|h\|<\delta$时，有

$$\|A(\varphi_0+h)-A\varphi_0-Bh\|\le\|h\|\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dy=\|h\|\varepsilon .$$

因此$\lim\limits_{\|h\|\to0}\dfrac{\|A(\varphi_0+h)-A\varphi_0-Bh\|}{\|h\|}=0$．故$A$在$\varphi_0$处$F$-可微且$A'(\varphi_0)=B$．

关于复合算子的可微性有

定理 3.5.4 设E_1,E_2,E_3都是 Banach 空间，D是E_1中的开集，H是E_2中的一个开集，$A:D\to E_2$，$B:H\to E_3$，$A(D)\subset H$．若A在$x_0\in D$处F-可微，B在$y_0=Ax_0$处F-可微，则复合算子$BA:D\to E_3$在x_0处F-可微且

$$(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0).$$

证明 由假设可知：$\exists\delta_1,\delta_2>0$使得

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h)\ (0<\|h\|<\delta_1),$$

$$B(y_0+k)-By_0=B'(y_0)k+\omega(y_0,k)\ (0<\|k\|<\delta_2),$$

其中

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0,\ \lim_{\|k\|\to 0}\frac{\|\omega(y_0,k)\|}{\|k\|}=0.$$

因此当$\|h\|\to 0$时，$A(x_0+h)-Ax_0\to 0$．记

$$k=A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h),$$

则存在$0<\delta<\delta_1$使得当$0<\|h\|<\delta$，有$\|k\|<\delta_2$．规定$\omega(y_0,0)=0$，则当$0<\|h\|<\delta$时，有

$$\begin{aligned}(BA)(x_0+h)-(BA)(x_0)&=B(y_0+k)-By_0\\&=B'(y_0)k+\omega(y_0,k)\\&=B'(y_0)A'(x_0)h+\overline{\omega}(x_0,h),\end{aligned}$$

其中

$$\overline{\omega}(x_0,h)=B'(y_0)\omega(x_0,h)+\omega(y_0,k).$$

对于任一$\varepsilon>0$, 取$\|h\|>0$充分小使得相应的k满足$\|\omega(y_0,k)\|\le\varepsilon\|k\|$．从而

$$\|\omega(y_0,k)\|\le\varepsilon\|h\|\frac{\|A'(x_0)h+\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}\le\varepsilon\|h\|\left[\|A'(x_0)\|+\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}\right].$$

因此$\overline{\lim_{\|h\|\to 0}}\dfrac{\|\omega(y_0,k)\|}{\|h\|}\le\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性知$\omega(y_0,k)=o(\|h\|)$,因此

$$\overline{\omega}(x_0,h)=o(\|h\|).$$

这就证明了BA在x_0处F-可微且$(BA)'(x_0)=B'(y_0)A'(x_0)$.证毕.

推论 1 如果算子$A:D\to E_2$在$x_0\in D$处F-可微，则对任一算子$B\in B(E_2,E_3)$，算子$BA:D\to E_3$在x_0处F-可微且有

$$(BA)'(x_0)=BA'(x_0).$$

3.5.2 中值定理与导算子的全连续性

定理 3.5.5 设$x_0,h\in E_1$，$l=\{x_0+th\mid 0\le t\le 1\}$是$E_1$中以$x_0$与$x_0+h$为端点的线段.

(i) 若泛函$f:D\to\mathbf{R}$ $(D\supset l)$在l上每一点F-可微，则存在$\theta\in(0,1)$使得中值公式成立：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h;$$

(ii) 若算子$A:D\to E_2$ $(D\supset l)$在l上每一点F-可微，则存在$\theta\in(0,1)$使得

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\| \le \|A'(x_0+\theta h)h\|;$$

(iii) 若算子 $A: D \to E_2$ $(D \supset l)$ 在线段 l 上每一点 F-可微，而且满足 $A': l \to B(E_1, E_2)$ 连续，则

$$\int_0^1 A'(x_0+th)h\,dt = A(x_0+h)-A(x_0).$$

证明 (i) 令 $\varphi(t)=f(x_0+th)$，$0 \le t \le 1$．由于

$$t \mapsto x_0+th : [0,1] \to E_1$$

可微（抽象函数）．从而由定理 3.5.4 知 $\varphi:[0,1]\to \mathbf{R}$ 可微且

$$\varphi'(t)=f'(x_0+th)h.$$

由微分学中值公式知，$\exists \theta \in (0,1)$ 使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$，即

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)\cdot h.$$

(ii) 由定理 2.2.5 知，$\exists f \in E_2^*$ 使得 $\|f\|=1$ 且

$$\begin{aligned}\|A(x_0+h)-Ax_0\| &= f[A(x_0+h)-Ax_0]\\ &= (f\circ A)(x_0+h)-(f\circ A)x_0.\end{aligned}$$

令 $\varphi(t)=f(A(x_0+th))$，$0\le t\le 1$．由定理 3.5.4 的推论 1 知，$\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}$ 可微且

$$\varphi'(t)=f[A'(x_0+th)h],\quad 0\le t\le 1.$$

由中值定理知，$\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$，即

$$f[A(x_0+h)-Ax_0]=\varphi(1)-\varphi(0)=f[A'(x_0+\theta h)h].$$

因此

$$\|A(x_0+h)-Ax_0\|\le\|f\|\cdot\|A'(x_0+\theta h)\cdot h\|=\|A'(x_0+\theta h)h\|.$$

(iii) 令

$$\varphi(t)=A(x_0+th),\quad 0\le t\le 1,$$

则定理 3.5.4 知 φ 在 $[0,1]$ 上可微且

$$\varphi'(t)=A'(x_0+th)h\quad(0\le t\le 1).$$

从而 $\varphi':[a,b]\to E_2$ 连续．所以,由定理 3.4.5 知,

$$\int_0^1\varphi'(t)dt=\varphi(1)-\varphi(0),$$

故

$$\int_0^1 A'(x_0+th)h\,dt=A(x_0+h)-Ax_0.$$

证毕.

定理 3.5.6 若算子 $A:D\to E$ 全连续且在 $x_0\in D$ 处是 F-可微，则算子 $A'(x_0):E_1\to E_2$ 全连续，其中 $D\subset E_1$ 是开集.

证明 由于 $A'(x_0)$ 是有界线性算子，故只需证 $A'(x_0)$ 是紧算子即可. 只要证明: $A'(x_0)$ 将 E_1 中的闭单位球 $S=\{x\in E_1:\|x\|\le 1\}$ 映成 E_2 中的列紧集 $A'(x_0)(S)$ 即可. 若 $A'(x_0)(S)$ 不是列紧集，则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得 $A'(x_0)(S)$ 没有有限的 ε_0-网. 由定理 1.1.18 的必要性的证明可知, 存在 $h_i\in S$ $(i=1,2,\cdots)$ 使得

$$\left\|A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j\right\|\ge\varepsilon_0\ (i\ne j).$$

由于 D 是开集，则 $\exists\tau>0$ 使得当 $\|h\|\le\tau$ 时，$x_0+h\in D$ 且

$$\left\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\right\|\le\frac{\varepsilon_0}{3}\|h\|.$$

于是,当 $i\ne j$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left\|A(x_0+\tau h_i)-A(x_0+\tau h_j)\right\|\\&=\|[A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_i)]\\&\quad-[A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_j)]+\tau[A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j]\|\\&\ge\tau\left\|A'(x_0)h_i-A'(x_0)h_j\right\|-\left\|A(x_0+\tau h_i)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_i)\right\|\\&\quad-\left\|A(x_0+\tau h_j)-Ax_0-A'(x_0)(\tau h_j)\right\|\\&\ge\tau\varepsilon_0-\frac{1}{3}\varepsilon_0\left\|\tau h_i\right\|-\frac{1}{3}\varepsilon_0\left\|\tau h_j\right\|\ge\frac{\tau\varepsilon_0}{3}.\end{aligned}$$

可见, $A(D)$ 中的点列 $\{A(x_0+\tau h_i)\}$ 没有收敛子列. 这与 A 全连续矛盾. 故 $A'(x_0)$ 是全连续的. 证毕.

由以上定理的证明可见: 若将 A 全连续改为紧算子，结论也成立.

3.5.3 高阶导算子与 Taylor 公式

定义 3.5.7 设 $A:D\to E_2$ 在开集 $D\subset E_1$ 内每一点 F-可微，则 $A':x\mapsto A'(x)$ 是 D 到 $B(E_1,E_2)$ 中的算子. 如果 A' 在 $x_0\in D$ 处 F-可微，则称 A' 在 x_0 处的 F-导算子 $(A')'(x_0)$ 为 A 在 x_0 处的二阶 F-导算子, 记为 $A''(x_0)$ 或 $A^{(2)}(x_0)$；显然，$A^{(2)}(x_0)\in B(E_1,B(E_1,E_2))$. 如果 A' 在 D 内每一点 F-可微，则得到算子

$$A''\equiv A^{(2)}:D\to B(E_1,B(E_1,E_2)).$$

如果$A^{(2)}$在$x_0\in D$处F-可微，则称$(A^{(2)})'(x_0)$为A在x_0处的三阶F-导算子，记为$A'''(x_0)$或$A^{(3)}(x_0)$．一般地，可定义A在x_0处的n阶F-导算子（如果$A',A^{(2)},\cdots,A^{(n-1)}$都存在）为$A^{(n)}(x_0)=(A^{(n-1)})'(x_0)$．以下记$A'=A^{(1)}$，$A=A^{(0)}$．

由此可得以下算子：

$$A^{(0)}:D\to E_2,$$

$$A^{(1)}(x_0):E_1\to E_2:=F_1,$$

$$A^{(2)}(x_0):E_1\to B(E_1,E_2)=F_2,$$

$$A^{(3)}(x_0):E_1\to B(E_1,B(E_1,E_2))=F_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$A^{(n)}(x_0):E_1\to B(E_1,F_{n-1})=F_n.$$

它们的值域空间满足:$F_1=E_2$，$F_{i+1}=B(E_1,F_i)\quad(1\le i\le n-1)$,且

$$A^{(i)}(x_0)\in B(E_1,F_i)\quad(1\le i\le n).$$

为了方便，$\forall h\in E_1$，记

$$(A^{(1)}(x_0))h=A^{(1)}(x_0)h,$$

$$((A^{(2)}(x_0))h)h=A^{(2)}(x_0)h^2,$$

$$(((A^{(3)}(x_0))h)h)h=A^{(3)}(x_0)h^3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\underbrace{(\cdots(}_{n\text{个}(}A^{(n)}(x_0))h)\cdots)h=A^{(n)}(x_0)h^n.$$

定理 3.5.8 设$x_0,h\in E_1$,记$l=\{x_0+th\mid 0\le t\le 1\}$,$D$是一个开集且$l\subset D$.如果泛函$F:D\to\mathbf{R}$在$l$上每一点处$F^{(n+1)}(x)$存在,则存在$\theta\in(0,1)$使得 Taylor 公式成立

$$F(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x_0)h^k+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

证明 考察函数$\varphi(t)=F(x_0+th)\quad(0\le t\le 1)$．易知

$$\varphi'(t)=F^{(1)}(x_0+th)h,\ \varphi''(t)=F^{(2)}(x_0+th)h^2,\cdots,$$

$$\varphi^{(n+1)}(t)=F^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}.$$

由数学分析中的 Taylor 公式得知：存在$\theta\in(0,1)$使得

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta).$$

从而

$$F(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}F^{(k)}(x_0)h^k+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

证毕.

定理 3.5.9 设 $x_0,h\in E_1$，$l=\{x_0+th\mid 0\le t\le 1\}$ 且 $D\supset l$ 是 E_1 中的开集. 如果算子 $A:D\to E_2$ 在 l 的每一点, $A^{(n+1)}(x)$ 存在，则 $\exists 0<\theta<1$ 使得下列不等式成立：

$$\left\|A(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{A^{(k)}(x_0)h^k}{k!}\right\|\le\frac{1}{(n+1)!}\left\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\right\|.$$

证明 令

$$z_0=A(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^{(k)}(x_0)h^k,$$

则由定理 2.2.5 知：存在 $f\in E_2^*$，使得 $\|f\|=1$ 且 $f(z_0)=\|z_0\|$. 设

$$\varphi(t)=f(A(x_0+th))\ (0\le t\le 1).$$

则

$$\varphi'(t)=f(A'(x_0+th)h),\varphi''(t)=f(A''(x_0+th)h^2),\cdots,$$
$$\varphi^{(n+1)}(t)=f(A^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}).$$

由 Taylor 公式知，$\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),$$

即

$$f(z_0)=\frac{1}{(n+1)!}f(A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}).$$

从而

$$\|z_0\|=f(z_0)\le\frac{1}{(n+1)!}\|f\|\cdot\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\|A^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|.$$

由此即得原不等式. 证毕.

上面定理中的不等式一般不能改为等式. 但是,当考虑积分余项时，有下面的

Taylor 公式成立.

定理 3.5.10 设 $x_0,h\in E_1$，$l=\{x_0+th\,|\,0\le t\le 1\}$ 且 $D\supset l$ 是 E_1 中的开集. 如果算子 $A:D\to E_2$ 在 l 上存在连续的 n 阶 F-导算子 $A^{(n)}$，则带积分余项的 Taylor 公式成立：

$$A(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^{(k)}(x_0)h^k+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}A^{(n)}(x_0+th)h^n dt.$$

证明 任取 $f\in E_2^*$，令

$$\varphi(t)=f(A(x_0+th))\ (0\le t\le 1).$$

则

$$\varphi^{(k)}(t)=f(A^{(k)}(x_0+th)h^k)\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

且 $\varphi^{(n)}(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由函数带积分余项的 Taylor 公式得：

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt,$$

即

$$f(A(x_0+h))=f\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^{(k)}(x_0)h^k\right]+f\left[\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}A^{(n)}(x_0+th)h^n dt\right].$$

由 $f\in E_2^*$ 的任意性，从而由定理 2.2.6 知，原公式成立. 证毕.

容易看出:在定理 3.5.10 的条件下，有

$$\left\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h-\frac{A''(x_0)h^2}{2!}-\cdots-\frac{A^{(n)}(x_0)h^n}{n!}\right\|$$
$$=\left\|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}[A^{(n)}(x_0+th)-A^{(n)}(x_0)]h^n dt\right\|$$
$$\le\frac{1}{n!}\max_{0\le t\le 1}\left\|A^{(n)}(x_0+th)-A^{(n)}(x_0)\right\|\|h\|^n.$$

特别地，当 $n=1$ 时，有公式：

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A'(x_0)h\|\le\int_0^1\|[A'(x_0+th)-A'(x_0)]h\|dt$$

习题 3.5

1. 证明定理 3.5.2 的(ii)—(iv).

2. 将极坐标变换$\begin{cases}x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$视为从

$$D = \{(r,\theta) | 0 < r < \infty, 0 < \theta < 2\pi\}$$

到$\mathbf{R}^2$的算子

$$T:(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

证明：T在D的每一点处F-可微，且$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$有

$$[T'(r_0,\theta_0)]h = \begin{bmatrix}\cos\theta_0 & -r_0\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & r_0\cos\theta_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1 \\ h_2\end{bmatrix}$$

并证明$\|T'(r_0,\theta_0)\| = r_0$.

3. 设算子$A: D \to E_2$在D内存在连续的n阶F-导算子$A^{(n)}$，且存在$x_0 \in D$使得

$$A'(x_0) = A''(x_0) = \cdots = A^{(n)}(x_0) = 0.$$

证明：如果D是凸集, 即

$$x_1, x_2 \in D \Rightarrow (1-t)x_1 + tx_2 \in D\ (0 \le t \le 1),$$

则$\forall h \in D$，有

$$\| A(x_0 + h) - Ax_0 \| \le \frac{\|h\|^n}{n!} \max_{0 \le t \le 1} \| A^{(n)}(x_0 + th) \|.$$

4. 在定理 3.5.8 的条件下，令

$$\varphi(t) = F(x_0 + th)(0 \le t \le 1).$$

证明: $\varphi(t)$在$[0,1]$上有$n+1$阶导数且

$$\varphi^{(k)}(t) = F^{(k)}(x_0 + th)h^k\ (1 \le k \le n+1).$$

5. 设D为$\mathbf{R}^n$中的非空开集，$f_i: D \to \mathbf{R}\ (1 \le i \le m)$是$m$个$n$元函数, 定义算子$A: D \to \mathbf{R}^n$如下：

$$Ax = (f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \cdots, f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)),$$
$$\forall x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D,$$

则

(i) 算子A在$x_0 \in D$处F-可微$\Leftrightarrow$ n元函数$f_1,\cdots,f_m$均在x_0处可微，并且在此条件下：

$$A'(x_0)h=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix},\quad \forall h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\mathbf{R}^n;$$

(ii) 算子 A 在 D 上有连续 F -导算子

$$A':D\to B(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$$

当且仅当 n 元函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 都在 D 上有连续偏导数，其中 $\alpha_{ij}=\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}$.

§3.6 Gâteaux 导算子

在上一节中,我们讨论了 Fréchet 微分与导算子,它们是研究非线性算子的重要工具. 由于 Fréchet 微分

$$d[A(x_0)h]=A'(x_0)h$$

定义为改变量 $A(x_0+h)-Ax_0$ 的线性主部，因而使得在讨论非线性算子 A 的某些问题时，可转化为研究线性有界算子 $A'(x_0)$ 的相应问题，这就是非线性泛函分析中的线性化方法. 然而，Fréchet 微分概念对算子的要求较强，在讨论算子(特别是泛函)的某些问题时，条件可以减弱，用所谓的 Gâteaux 微分与 Gâteaux 导算子代替 Fréchet 微分与 Fréchet 导算子. 这一种微分概念是数学分析中方向导数概念的自然推广，而 F -微分则是全微分概念的推广. 本节, E_1,E_2,E_3 恒表示实的 Banach 空间.

3.6.1 定义与性质

定义 3.6.1 设 $A:D\to E_2$， $D\subset E_1$ 为开集， $x_0\in D$. 若对任何 $h\in E_1$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}$$

都存在（以 E_2 中的范数），则称算子 A 在 x_0 处 Gâteaux 可微,简称 G -可微，此极限(E_2 中的元素)叫做算子 A 在 x_0 处沿方向 h 的 Gâteaux 微分(简称 G -微分)，记为 $D[A(x_0)h]$，即

$$D[A(x_0)h]=\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}.$$

如果存在算子 $B\in B(E_1,E_2)$ 使得

$$D[A(x_0)h]=Bh \quad (\forall h\in E_1),$$

则称算子 A 在 x_0 处具有有界线性的 Gâteaux 微分且有界线性算子 B 叫做 A 在 x_0 处的 Gâteaux 导算子，简称 G-导算子，记为 $A'_g(x_0)$，即

$$D[A(x_0)h]=A'_g(x_0)h, \quad \forall h\in E_1.$$

定理 3.6.2 (i) 若算子 $A:D\to E_2$ 在点 $x_0\in D$ 处 G-可微,则对任意的 $B\in B(E_2,E_3)$，算子 $BA:D\to E_3$ 在点 x_0 处 G-可微且有

$$D[(BA)(x_0)h]=B(D[A(x_0)h]), \forall h\in E_1;$$

(ii) 若算子 A 在 x_0 处有有界线性的 G-微分，则 $\forall B\in B(E_2,E_3)$，算子 $BA:D\to E_3$ 也在 x_0 处有有界线性的 G-微分，并且

$$(BA)'_g(x_0)=BA'_g(x_0)，\text{其中} B\in B(E_2,E_3);$$

(iii) 若算子 $A,B:D\to E_2$ 都在点 x_0 处 G-可微,则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,算子 $\alpha A+\beta B:D\to E_2$ 在 x_0 处 G-可微且 $\forall h\in E_1$，有

$$D[(\alpha A+\beta B)(x_0)h]=\alpha D[A(x_0)h]+\beta D[B(x_0)h];$$

(iv) 若算子 $A,B:D\to E_2$ 都在点 $x_0\in D$ 处的 G-导算子存在，则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，算子 $\alpha A+\beta B:D\to E_2$ 在 x_0 处的 G-导算子也存在且有

$$(\alpha A+\beta B)'_g(x_0)=\alpha A'_g(x_0)+\beta B'_g(x_0).$$

证明 留作练习.

3.6.2 两种微分之间的关系

定理 3.6.3 设 $A:D\to E_2$，$D\subset E_1$ 为开集且 $x_0\in D$.

(i) 若 A 在 x_0 处 F-可微，则 A 在 x_0 处有有界线性的 G-微分且 $\forall h\in E_1$ 有

$$D[A(x_0)h]=d[A(x_0)h]，\quad A'_g(x_0)=A'(x_0);$$

(ii) 若 A 在 x_0 的邻域 $B(x_0,r)\subset D$ 内的每一点具有有界线性的 G-微分，且由 A 的 G-导算子诱导的算子

$$A'_g:B(x_0,r)\to B(E_1,E_2)$$

在 x_0 处连续，则 A 在 x_0 处 F-可微且 $\forall h\in E_1$,有

$$d[A(x_0)h]=D[A(x_0)h], A'(x_0)=A'_g(x_0).$$

证明 (i) 由假定有：当 $\|h\|$ 很小时

$$A(x_0+h)-Ax_0=A'(x_0)h+\omega(x_0,h),$$

其中

$$\omega(x_0,h)=o(\|h\|)\ (\|h\|\to 0).$$

于是，对固定的$h\in E_1\setminus\{0\}$，当$t\in\mathbf{R}$且$|t|$很小时,有

$$A(x_0+th)-Ax_0-A'(x_0)(th)=\omega(x_0,th)$$

成立.因此

$$\left\|\frac{A(x_0+th)-Ax_0}{t}-A'(x_0)h\right\|=\left\|\frac{\omega(x_0,th)}{t}\right\|$$

$$=\frac{\|\omega(x_0,th)\|}{\|th\|}\cdot\|h\|\to 0\cdot\|h\|=0\ (t\to 0).$$

故

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x_0+th)-A(x_0)}{t}=A'(x_0)h\ (\forall h\in E_1).$$

由定义知A在x_0处G-微分，同时也有$A_g'(x_0)=A'(x_0)$且

$$D[A(x_0)h]=A'(x_0)h=d[A(x_0)h],\quad \forall h\in E_1.$$

(ii) 因为A_g'在x_0处连续,所以$\forall\varepsilon>0$，存在$0<\delta<r$使得当$h\in E_1$且$\|h\|<\delta$时，恒有

$$\|A_g'(x_0+h)-A_g'(x_0)\|<\varepsilon.$$

下证：当$0<\|h\|<\delta$时，恒有

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A_g'(x_0)h\|\le\varepsilon\cdot\|h\|.$$

取$h\in E_1$且$0<\|h\|<\delta$.由定理2.2.5知:$\exists f\in E_2^*$，使得$\|f\|=1$且

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A_g'(x_0)h\|=f[A(x_0+h)-Ax_0-A_g'(x_0)h].$$

令

$$\varphi(t)=f(A(x_0+th)),\quad 0\le t\le 1.$$

易知

$$\varphi'(t)=f(A_g'(x_0+th)h).$$

由中值定理知：$\exists\theta\in(0,1)$，使得$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$，即

$$f[A(x_0+h)-Ax_0]=f[A_g'(x_0+\theta h)h].$$

从而

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-A_g'(x_0)h\|$$

$$=f([A_g'(x_0+\theta h)-A_g'(x_0)]h)$$

$$\le \| f \| \cdot \| A_g'(x_0 + \theta h) - A_g'(x_0) \| \cdot \| h \|$$
$$\le \varepsilon \| h \| .$$

故

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| A(x_0 + h) - Ax_0 - A_g'(x_0)h \|}{\| h \|} = 0 .$$

由定义可知：A 在 x_0 处 F-可微，且 $\forall h \in E_1$ 有

$$d[A(x_0)h] = A_g'(x_0)h = D[A(x_0)h],\quad A'(x_0) = A_g'(x_0) .$$

证毕.

注意，当 A 仅在一点 x_0 处具有有界线性的 G-微分时，一般不能保证 A 在 x_0 处 F-可微，请看下面的例 1.

例 1 定义泛函 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq (0,0); \\ 0, & x = (0,0). \end{cases}$$

由于

$$| f(x) | \le | x_1 | + | x_2 | + \frac{1}{2} | x_1 | \to 0 = f(\theta)\ (x \to 0) ,$$

从而 f 在 $\theta = (0,0)$ 处连续. 又 $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\theta\}$,有

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\theta + th) - f(\theta)}{t} = \lim_{t \to 0} [h_1 + h_2 + \frac{t^3 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2}] = h_1 + h_2 .$$

从而 $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$，有

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\theta + th) - f(\theta)}{t} = h_1 + h_2 = \overline{g}(h) .$$

其中 $\overline{g} = (1,1) \in B(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) = (\mathbf{R}^2)^* = \mathbf{R}^2$. 因此，$f$ 在 θ 处具有有界线性的 G-微分，且 $f_g'(\theta) = (1,1)$.

假若 f 在 θ 处 F-可微，则由定理 3.6.3(i)知，

$$d[f(\theta)h] = D[f(\theta)h] = f_g'(\theta)h = h_1 + h_2 ,$$

且

$$f'(\theta) = f_g'(\theta), \forall h = (h_1, h_2) \in R^2 ,$$

于是，当 $h = (h_1 + h_2) \neq 0$ 时，

$$\omega(\theta,h)=f(\theta+h)-f(\theta)-f'(\theta)h=\frac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}$$

应当满足

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|\omega(\theta,h)|}{\|h\|}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0,$$

但当$h_2=h_1^2$且$h_1\to 0^+$,有

$$\frac{|\omega(\theta,h)|}{\|h\|}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+h_1^2}}\to\frac{1}{2},$$

矛盾.

由上可知：f 在θ处有有界线性的G-微分，但f 在θ处不是F-可微的.

例 2 设$f(x,u)$是$[a,b]\times(-\infty,\infty)$上的连续实函数且偏导数$f_u(x,u)$也连续，定义$A:C[a,b]\to C[a,b]$如下

$$(A\phi)(x)=f(x,\phi(x)),\forall\phi\in C[a,b],x\in[a,b],$$

则A在$C[a,b]$的每一点G-可微且G-导算子

$$A_g':C[a,b]\to \mathrm{B}(C[a,b])$$

连续且满足

$$(A_g'\phi)h(x)=f_u(x,\phi(x))\cdot h(x),\forall\phi\in C[a,b],x\in[a,b].$$

从而，由定理 3.6.3(ii)知：A在$C[a,b]$的每一点有连续的F-导算子$A'=A_g'$.

其实，任取$\phi_0\in C[a,b]$，则$\forall h\in C[a,b]$,当$t\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$时,对任意的$x\in[a,b]$,有

$$\left|\frac{[A(\phi_0+th)](x)-(A\phi_0)(x)}{t}-f_u(x,\phi_0(x))h(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{t}[f(x,\phi_0(x)+th(x))-f(x,\phi_0(x))]-f_u(x,\phi_0(x)h(x)\right|$$

$$=|f_u(x,\phi_0(x)+\theta th(x))\cdot h(x)-f_u(x,\phi_0(x))\cdot h(x)|,$$

其中$x\in[a,b],0<\theta<1$. 记

$$M=\max_{a\le x\le b}|\phi_0(x)|+1=\|\phi_0\|+1.$$

由于$f_u(x,u)$在$[a,b]\times[-M,M]$上一致连续，从而$\forall\varepsilon>0$,
$\exists\delta\in(0,1)$, 使得$|u'-u''|<\delta$时，对一切$x\in[a,b]$，有

$$|f_u(x,u')-f_u(x,u'')|<\varepsilon.$$

于是，当$0<|t|<\frac{1}{\|h\|+1}\delta$时，对一切$x\in[a,b]$，有

$$|f_u(x,\phi_0(x)+\theta th(x))-f_u(x,\phi_0(x))|<\varepsilon.$$

因此，当$0<|t|<\frac{1}{\|h\|+1}\delta$时,有

$$\left\|\frac{A(\phi_0+th)-A\phi_0}{t}-Bh\right\|\le\varepsilon\cdot\|h\|,$$

其中$(Bh)(x)=f_u(x,\phi_0(x))\cdot h(x)$.故$A$在$\phi_0$处$G$-可微且具有有界线性的$G$-微分(因$B\in B(C[a,b])$)，以及$\forall x\in[a,b]$,有

$$(A_g'\phi_0)h(x)=(Bh)(x)=f_u(x,\phi_0(x))\cdot h(x),\forall h\in C[a,b].$$

下证$A_g':C[a,b]\to B(C[a,b])$连续. 为此，任取$\phi_0\in C[a,b]$,则

$$\begin{aligned}\|A_g'\phi-A_g'\phi_0\|&=\sup_{\|h\|=1}\|(A_g'\phi)h-(A_g'\phi_0)h\|\\&=\sup_{\|h\|=1}\max_{0\le x\le 1}|f_u(x,\phi(x))-f_u(x,\phi_0(x))|\cdot|h(x)|\\&\le\max_{0\le x\le 1}|f_u(x,\phi(x))-f_u(x,\phi_0(x))|,\forall\phi\in C[a,b].\end{aligned}$$

根据$f_u(x,u)$在$[a,b]\times[-M,M]$上一致连续可知：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得当$\|\phi-\phi_0\|<\delta$时，有

$$\|A_g'(\phi)-A_g'(\phi_0)\|<\varepsilon.$$

故A_g'在ϕ_0处连续，这就证明了前面的论断.

仔细考察一下定理 3.5.5 的证明可知：三个结论都是由辅助函数$\phi:[0,1]\to\mathbf{R}$的可微性推出，从而不难看出ϕ的可微性可由相应泛函或算子在线段l上的G-可微性推出. 因此,将那里的“F-可微”改为“G-可微”结论也成立，即有

定理 3.6.4 设$x_0,h\in E_1$,用l表示线段

$$l=\{x_0+th\,|\,0\le t\le 1\}.$$

(i) 若泛函$f:D\to\mathbf{R}(D\supset l)$在$l$上的每一点处都$G$-可微，则存在$\theta\in(0,1)$使得中值公式成立：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=D[f(x_0+\theta h)h];$$

(ii) 若算子$A:D\to E_2(D\supset l)$在l上每一点处都G-可微，则存在$\theta\in(0,1)$使

$$\| A(x_0+h)-Ax_0 \| \le \| D[A(x_0+\theta h)h] \|;$$

（iii）若算子 $A:D\to E_2(D\supset l)$ 在 l 每点 G-可微且 $D[A(x_0+th)h]$ 关于 $t\in[0,1]$ 连续，则

$$\int_0^1 D[A(x_0+th)h]dt = A(x_0+h)-A(x_0).$$

习题 3.6

1. 设 $f,g,h:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为三个二元函数，定义

$$Ax=(f(x_1,x_2),g(x_1,x_2),h(x_1,x_2)),\quad \forall x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2.$$

证明:算子 $A:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 在 $a=(a_1,a_2)$ 处 G-可微当且仅当二元函数 f,g,h 在 a 处沿任一方向 l 的方向导数都存在, 此时

$$D[A(a)l]=\left(\frac{\partial f}{\partial l},\frac{\partial g}{\partial l},\frac{\partial h}{\partial l}\right)\bigg|_{x=a}.$$

2. 设实值函数 $K(x,y,u)$ 及其偏导数 $K_u(x,y,u)$ 都在

$$[a,b]\times[a,b]\times(-\infty,\infty)$$

上连续, 定义

$$(A\varphi)(x)=\int_a^b K(x,y,\varphi(y))dy,\quad \forall\varphi\in C[a,b].$$

证明： $A:C[a,b]\to C[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 的每一点有有界线性的 G-微分且 A 在 $\varphi_0\in C[a,b]$ 处的 G-导算子满足

$$[A_g'(\varphi_0)]h(x)=\int_a^b K_u(x,y,\varphi_0(y))\cdot h(y)dy,\quad \forall h\in C[a,b].$$

3. 证明第 2 题中的算子 A 的 G-导算子

$$A_g':C[a,b]\to \mathrm{B}(C[a,b])$$

在 $C[a,b]$ 的每一点 φ_0 处连续，且 A 在 $C[a,b]$ 的每一点处 F-可微及

$$A'(\varphi_0)=A_g'(\varphi_0).$$

4. 证明定理 3.6.2.

§3.7 偏导算子与隐算子定理

本节将给出数学分析中的隐函数存在定理对算子方程的推广，建立隐算子存在定理. 为此，先介绍偏导算子及有关性质，作为隐算子存在定理的应用，给

出反算子存在定理．以下恒用 E_1,E_2,E_3 表示实 Banach 空间．

3.7.1 偏导算子

设 G 为乘积空间 $E_1\times E_2$ 中的非空开集，F 是 G 到 E_3 的算子，对任一 $(x_0,y_0)\in G$，必有 x_0 与 y_0 的邻域 $U(x_0)\subset E_1$ 与 $V(y_0)\subset E_2$，使得

$$U(x_0)\times V(y_0)\subset G.$$

这样，由 $F:G\to E_3$ 可得以下两个算子：

$$F_1:U(x_0)\to E_3, F_1(x)=F(x,y_0), \forall x\in U(x_0);$$
$$F_2:V(y_0)\to E_3, F_2(y)=F(x_0,y), \forall y\in V(y_0).$$

定义 3.7.1 设 $F:G\to E_3$ 为一算子，$(x_0,y_0)\in D$，如果 $F_1:U(x_0)\to E_3$ 在 x_0 处的 F-导算子 $F_1'(x_0)$ 存在，则称 $F_1'(x_0)\in B(E_1,E_3)$ 为 F 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导算子，记为 $F_x'(x_0,y_0)$.类似地，称 $F_2:V(y_0)\to E_3$ 在 y_0 处的 F-导算子 $F_2'(y_0)\in B(E_2,E_3)$（如果存在）为 F 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导算子，记为 $F_y'(x_0,y_0)$.

由定义可知：$F_x'(x_0,y_0)$ 与 $F_y'(x_0,y_0)$ 满足.

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)-F_x'(x_0,y_0)h\|}{\|h\|}=0 \tag{3.7.1}$$

与

$$\lim_{\|k\|\to 0}\frac{\|F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)-F_y'(x_0,y_0)k\|}{\|k\|}=0. \tag{3.7.2}$$

关于导算子 F' 与偏导算子 F_x',F_y' 的关系有

定理 3.7.2 设 $F:G\to E_3(G\subset E_1\times E_2$ 为开集)，则

(i) 当 F 在 $(x_0,y_0)\in G$ 处 F-可微时，偏导算子 $F_x'(x_0,y_0)$ 与 $F_y'(x_0,y_0)$ 都存在，且

$$\begin{cases}F_x'(x_0,y_0)h=F'(x_0,y_0)(h,0), \forall h\in E_1,\\ F_y'(x_0,y_0)k=F'(x_0,y_0)(0,k), \forall k\in E_2;\end{cases} \tag{3.7.3}$$

(ii) 当偏导算子 F_x' 与 F_y' 在 $(x_0,y_0)\in G$ 的某个邻域内存在(即有定义)且连续时，F 必在 (x_0,y_0) 处 F-可微且 F-微分为

$$d[F(x_0,y_0)(h,k)]=F'(x_0,y_0)(h,k)=F_x'(x_0,y_0)h+F_y'(x_0,y_0)h. \tag{3.7.4}$$

证明 (i) 此时,

$$\| F(x_0+h,y_0+h)-F(x_0,y_0)-F'(x_0,y_0)(h,k)\| = o(\|(h,k)\|).$$

取$k=0$得

$$\| F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)-B_1 h\| = o(\| h\|),$$

其中$B_1 h = F'(x_0,y_0)(h,0)$. 因此$B_1 \in B(E_1,E_3)$.从而可知算子$F_1 = F(\cdot,y_0)$在x_0处F-可微且$F_x'(x_0,y_0)=F_1'(x_0)=B_1$，同理可证$F_y'(x_0,y_0)$也存在且

$$F_y'(x_0,y_0)k = F'(x_0,y_0)(k,0).$$

因此，$F_x'(x_0,y_0)$与$F_y'(x_0,y_0)$都存在且满足(3.7.3)式.

(ii) 由假定知：$\forall \varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 当$0<\|(h,k)\|<\varepsilon$时,

$$\| F_x'(x_0+h,y_0+k)-F_x'(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.7.5}$$

且

$$\| F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)-F_y'(x_0,y_0)k\| \le \frac{\varepsilon}{3}\| k\|. \tag{3.7.6}$$

特别地，由(3.7.5)知:当$0<\|(h,k)\|<\delta$时，$\forall t\in[0,1]$，由(3.7.5)得

$$\| F_x'(x_0+th,y_0+k)-F_x'(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当$0<\|(h,k)\|<\delta$时, 有

$$\begin{aligned}
&\| F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0)-F_x'(x_0,y_0)h-F_y'(x_0,y_0)k\| \\
&\le \| F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0+k)-F_x'(x_0,y_0)h\| \\
&\quad + \| F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)-F_y'(x_0,y_0)k\| \\
&= \int_0^1 \| [(F_x'(x_0+th,y_0+k)-F_x'(x_0,y_0)]h\| dt + \frac{\varepsilon}{3}\|(h,k)\| \\
&\le \frac{1}{3}\varepsilon\| h\| + \frac{1}{3}\|(h,k)\| \le \varepsilon\|(h,k)\|.
\end{aligned}$$

若定义

$$B(x,y) = F_x'(x_0,y_0)x + F_y'(x_0,y_0)y,$$

则$B\in B(E_1\times E_2,E_3)$且满足：

$$\| F(x_0+h,y_0+k)-F(x_0,y_0)-B(h,k)\| = o(\| h,k)\|,$$

故F在(x_0,y_0)处F-可微且(3.7.4)成立.证毕.

由定理 3.5.4 知：若算子$F:G\to E_3$在(x_0,y_0)处的偏导算子$F_x'(x_0,y_0)$存

在，E_4 为实 Banach 空间，则 $\forall B\in B(E_3,E_4)$，$B\circ F:G\to E_4$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数也存在且

$$(B\circ F)'_x(x_0,y_0)=B\circ F'_x(x_0,y_0). \tag{3.7.7}$$

3.7.2 隐算子存在定理

设 Ω 为 $E_1\times E_2$ 中的非空开集，$F:\Omega\to E_3$，考察算子方程.

$$F(x,y)=0. \tag{3.7.8}$$

如果 $(x_0,y_0)\in\Omega$ 且存在 x_0 与 y_0 的邻域 $U(x_0)\subset E_1$ 与 $V(y_0)\subset E_2$，使得 $U(x_0)\times V(y_0)\subset\Omega$，并存在算子

$$f:U(x_0)\to V(y_0)$$

满足

$$F(x,f(x))\equiv 0\big(\forall x\in U(x_0)\big) \tag{3.7.9}$$

且

$$y_0=f(x_0), \tag{3.7.10}$$

则称 $f:U(x_0)\to V(y_0)$ 是方程(3.7.8)在 (x_0,y_0) 附近确定的一个隐算子.

与隐函数的情况类似，以下研究方程(3.7.8)何时在 (x_0,y_0) 附近确定唯一的隐算子.这个问题显然等价于：何时存在 x_0 的邻域 $B(x_0,r)$，使得每一个 $x\in B(x_0,r)$ 有且只有一个 $y\in B(y_0,\tau)$ 与 x 满足方程 $F(x,y)=0$.同时，还要讨论隐算子的连续性与可微性等.

定理 3.7.3 设 $F:\Omega\to E_3,(x_0,y_0)\in\Omega$，如果

(1) F 在 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且 F'_y 存在；

(2) $F(x_0,y_0)=0,F'_y$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

(3) $[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\in B(E_3,E_2)$，

则存在 $\gamma>0,\tau>0$ 及唯一的算子

$$f:B(x_0,r)\to B(y_0,\tau)\subset E_2$$

满足：

(i) $\forall x\in B(x_0,r),F(x,f(x))=0$；

(ii) $y_0=f(x_0)$；

(iii) f 在 $B(x_0,r)$ 内连续.

证明 设 $M=\left\|[F'_y(x_0,y_0)]^{-1}\right\|$，由假设知：$\exists\delta>0,\tau>0$，使得

$$F: D=\overline{B}(x_0,\delta)\times\overline{B}(y_0,\delta)\to E_3 \tag{3.7.11}$$

连续，且当$x\in\overline{B}(x_0,\delta), y\in\overline{B}(y_0,\delta)$时，有

$$\| F_y'(x,y)-F_y'(x_0,y_0)\|<\frac{1}{2M}. \tag{3.7.12}$$

又因为$F(\cdot,y_0):\overline{B}(x_0,\delta)\to E_3$连续，从而$\exists 0<r\leq\delta$，使得当$x\in B(x_0,r)$时，恒有

$$\| F(x,y_0)\|=\| F(x,y_0)-F(x_0,y_0)\|<\frac{\tau}{2M}. \tag{3.7.13}$$

现设$x\in B(x_0,r)$固定，令

$$\Phi(y)=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y), y\in\overline{B}(y_0,\tau).$$

显然，存在唯一的$y\in B(y_0,\tau)$使得$F(x,y)=0$当且仅当Φ在$B(y_0,\tau)$有唯一的不动点y（即$\Phi(y)=y$）.

下面应用压缩映射原理. 为此,先证

$$\Phi(\overline{B}(y_0,\tau))\subset B(y_0,\tau).$$

由(3.7.12)知，当$y\in\overline{B}(y_0,\tau)$，即$\| y-y_0\|\leq\tau$时，有

$$\begin{aligned}\|\Phi'(y)\| &=\| I-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F_y'(x,y)\|\\ &=\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\cdot[F_y'(x_0,y_0)-F_y'(x,y)]\|\\ &<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

由于函数$F(x,\cdot)$在$B(y_0,\tau)$内每一点都$F-$可微，从而由定理 3.5.5(ii)可知：当$y_1,y_2\in B(y_0,\tau)$时，存在$0<\theta<1$使得

$$\begin{aligned}\|\Phi(y_2)-\Phi(y_1)\| &\leq\|\Phi'(y_1+\theta(y_2-y_1))\cdot(y_2-y_1)\|\\ &\leq\|\Phi'(y_1+\theta(y_2-y_1))\|\cdot\|(y_2-y_1)\|\\ &\leq\frac{1}{2}\| y_2-y_1\|.\end{aligned}$$

因为$\Phi:\overline{B}(y_0,\tau)\to E_2$连续，从而可知：当$y_1,y_2\in\overline{B}(y_0,\tau)$时也有：

$$\|\Phi(y_2)-\Phi(y_1)\|\leq\frac{1}{2}\| y_2-y_1\|. \tag{3.7.14}$$

当$y\in\overline{B}(y_0,\tau)$时，有

$$\|\Phi(y)-y_0\|\le\|\Phi(y)-\Phi(y_0)\|+\|\Phi(y_0)-y_0\|$$
$$\le\frac{1}{2}\|y-y_0\|+\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y_0)\|$$
$$\le\tau.$$

可见,$\Phi(y)\in B(y_0,\tau)$,因此$\Phi:\overline{B}(y_0,\tau)\to\overline{B}(y_0,\tau)$是压缩映射且

$$\Phi(y)\in B(y_0,\tau),\forall y\in\overline{B}(y_0,\tau).$$

因为$\overline{B}(y_0,\tau)$是Banach空间E_2中的闭集, 从而本身也是完备的距离空间. 所以,由压缩映射原理(定理 1.1.19)知: 存在唯一的$y\in\overline{B}(y_0,\tau)$使得$\Phi(y)=y$. 因为$\Phi$的值域含在开球$B(y_0,\tau)$之中, 从而$y\in B(y_0,\tau)$. 这就证明了：对每个固定$x\in B(x_0,r)$，有且仅有一个$y\in B(y_0,\tau)$使得$\Phi(y)=y$即$F(x,y)=0$. 记$f(x)=y$，则得到唯一的一个算子$f:B(x_0,r)\to B(y_0,\tau)$满足要求(i).又因为$\Phi(y_0)=y_0$，从而$y_0=f(x_0)$. 可见,(ii)也满足.下证$f$连续. 设

$$x_1,x_2\in B(x_0,r),y_i=f(x_i)(i=1,2),$$
$$h(x,y)=y-[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y),$$

则由f的定义知：$h(x_2,y_2)=y_2,h(x_1,y_1)=y_1$且由(3.7.14)式知

$$\|h(x_2,y_2)-h(x_2,y_1)\|\le\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|.$$

因此

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|$$
$$=\|y_2-y_1\|$$
$$=\|h(x_2,y_2)-h(x_1,y_1)\|$$
$$\le\|h(x_2,y_2)-h(x_2,y_1)\|+\|h(x_2,y_1)-h(x_1,y_1)\|$$
$$\le\frac{1}{2}\|y_2-y_1\|+\|[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}\cdot[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)]\|$$
$$\le\frac{1}{2}\|f(x_2)-f(x_1)\|+M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|.$$

从而

$$\|f(x_2)-f(x_1)\|\le 2M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|.$$

根据算子F在(x_1,y_1)处的连续性可知：$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,$ 当$\|x_2-x_1\|<\eta$且$x_1,x_2\in B(x_0,r)$时,有

$$\| f(x_2)-f(x_1)\| < \varepsilon .$$

故 f 在 x_1 处连续，由 $x_1\in B(x_0,r)$ 任意性可知 f 在 $B(x_0,r)$ 内每一点连续，证毕.

我们称定理 3.7.3 结论中唯一的算子 $f:B(x_0,r)\to B(y_0,\tau)$ 是方程(3.7.8)在 (x_0,y_0) 处所确定的隐算子. 因而,这个定理被称为隐算子存在定理.

定理 3.7.4 在定理 3.7.3 的条件下，再设 F_x',F_y' 在 (x_0,y_0) 的某邻域中存在且连续，则可取定理 3.7.3 中的 $r>0,\tau>0$ 使得结论中的隐算子

$$f:B(x_0,r)\to B(y_0,\tau)$$

在 $B(x_0,r)$ 内每一点 F -可微, 有连续的 F -导算子 f' 且

$$f'(x)=-[F_y'(x,f(x))]^{-1}F_x'(x,f(x)),x\in B(x_0,r)$$

成立.

证明 设 $G(x,y)=[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F(x,y)$，则在 (x_0,y_0) 的某邻域中，

$$G_y'(x,y)=[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}F_y'(x,y)$$

存在且连续. 由于 $G_y'(x_0,y_0)=I$（恒等算子）在 $B(E_2)$ 中有有界逆算子，且 G_y' 在 (x_0,y_0) 处连续，从而根据定理 2.5.3 知：对 (x_0,y_0) 的某邻域中的一切 (x,y)，算子 $G_y'(x,y)$ 也有有界逆算子，从而 $F_y'(x,y)=F_y'(x_0,y_0)G_y'(x,y)$ 也有有界逆算子且

$$[F_y'(x,y)]^{-1}=[G_y'(x,y)]^{-1}[F_y'(x_0,y_0)]^{-1}.$$

由习题 2.5.6 知：映射 $T\mapsto T^{-1}$ 连续. 因为映射 $(x,y)\mapsto F_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，所以复合映射 $(x,y)\mapsto [F_y'(x,y)]^{-1}$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，从而有界(因为连续性 $\Rightarrow$ 局部有界性). 因此，当定理 3.7.3 的证明中所选取的 $r>0$ 与 $\tau>0$ 充分地小且 $x\in B(x_0,r),y\in B(y_0,\tau)$ 时，

$$\| F_y'(x,y)\|\le M_1,\|[F_y'(x,y)]^{-1}\|\le M, \tag{3.7.15}$$

其中 M_1 为常数，且 $F_x',F_y',[F_y'(\cdot,\cdot)]^{-1}$,即

$$(x,y)\mapsto F_x'(x,y),(x,y)\mapsto F_y'(x,y),(x,y)\mapsto [F_y'(x,y)]^{-1}$$

都在 $B(x_0,r)\times B(y_0,\tau)$ 上连续.

设 $x_1,x_2\in B(x_0,r)$，$y_i=f(x_i)(i=1,2)$，则由（3.7.15）式知

$\| f(x_2)-f(x_1)+[F_y'(x_1,y_1)]^{-1}F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)\|$

$\le\|[F_y'(x_1,y_1)]^{-1}\|\cdot\| F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)+F'(x_1,y_1)(x_2-x_1)\|$

$$\le M_1 \cdot \| F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|.$$

由定理 2.2.5 知：存在$\psi \in E_3^*, \|\psi\|=1$使得

$$\| F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|$$
$$=\psi(F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)).$$

令

$$\varphi(t)=\psi(F(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))),\quad 0\le t\le 1,$$

则当$0\le t\le 1$时,有

$$\varphi'(t)=\psi(F_x'(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))\cdot(x_2-x_1)$$
$$+F_y'(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))(y_2-y_1)).$$

由中值定理知：存在$0<\theta<1$使$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$. 因为

$$F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=0,$$

从而$\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 令

$$x_\theta=x_1+\theta(x_2-x_1), y_\theta=y_1+\theta(y_2-y_1),$$

则

$$\psi(F_x'(x_\theta,y_\theta)(x_2-x_1)+F_y'(x_\theta,y_\theta)(y_2-y_1))=0.$$

从而

$$\| F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|$$
$$=\psi([F_x'(x_1,y_1)-F_x'(x_\theta,y_\theta)](x_2-x_1)$$
$$+\psi([F_y'(x_1,y_1)-F_y'(x_\theta,y_\theta)](y_2-y_1))$$
$$\le\| F_x'(x_1,y_1)-F_x'(x_\theta,y_\theta)\|\cdot\|x_2-x_1\|$$
$$+\| F_y'(x_1,y_1)-F_y'(x_\theta,y_\theta)\|\cdot\|y_2-y_1\|.$$

另一方面，由定理 3.7.3 的证明知：

$$\begin{aligned}\|y_2-y_1\|&=\|f(x_2)-f(x_1)\|\\&\le 2M\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|\\&\le 2M\|F_x'(x_1+\theta_1(x_2-x_1),y_1)\cdot(x_2-x_1)\|\\&\le 2M\cdot M_1\cdot\|x_2-x_1\|.\end{aligned}$$

所以

$$\| F_x'(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F_y'(x_1,y_1)(y_2-y_1)\|$$
$$\le\left\|F_x'(x_\theta,y_\theta)-F_x'(x_1,y_1)\right\|\cdot\left\|x_2-x_1\right\|$$
$$+2MM_1\left\|F_y(x_\theta,y_\theta)-F_y'(x_1,y_1)\right\|\cdot\left\|x_2-x_1\right\|.$$

再由F'_x, F'_y的连续性及f的连续性知

$$\lim_{\|x_2-x_1\|\to 0}\frac{\left\|f(x_2)-f(x_1)+[F'_y(x_1,y_1)]^{-1}F'_x(x_1,y_1)(x_2-x_1)\right\|}{\left\|x_2-x_1\right\|}=0.$$

故f在x_1处F-可微且

$$f'(x_1)=-[F'_y(x_1,y_1)]^{-1}F'_x(x_1,y_1)=-[F'_y(x_1,f(x_1))]^{-1}F'_x(x_1,f(x_1)).$$

由$x_1\in B(x_0,r)$任意性可知f在$B(x_0,r)$内每一点F-可微且所述公式成立. 再由$[F'_y(\cdot,\cdot)]^{-1}, F'_x$及$f$的连续性知$f':B(x_0,r)\to B(y_0,\tau)$连续，证毕.

3.7.3 反算子存在定理

设D为E_1中的开集，$A:D\to E_2$为算子，如果$x_0\in D$，$y_0=Ax_0$,则讨论是否存在x_0与y_0的邻域$U(x_0)$与$V(y_0)$使得$A:U(x_0)\to V(y_0)$存在逆映射A^{-1},即对每个$y\in V(y_0)$存在唯一的$x\in U(x_0)$使的$Ax=y$.

为此,考察算子方程

$$F(x,y)=Ax-y=0.$$

显然，当$A'(x)$在x_0的某邻域内存在且有有界逆算子时，算子

$$F'_x(x,y)=A'(x)$$

在(x_0,y_0)的某个邻域内存在且$F'_x(x_0,y_0)=A'(x_0)$有有界逆算子. 显然

$$F(x_0,y_0)=Ax_0-y_0=0,$$

且此时F还在(x_0,y_0)的某邻域连续. 这样，由隐算子存在定理知:存在$\tau>0, r>0$, 及唯一的连续算子

$$f:B(y_0,r)\to B(x_0,\tau)$$

使得$F(f(y),y)=0$即

$$y=Af(y), \forall y\in B(y_0,r).$$

记$U(x_0)=f(B(y_0,r))$，则

$$U(x_0)=A^{-1}(V(y_0))\cap B(x_0,\tau),$$

其中$V(y_0)=B(y_0,r)$，从而$U(x_0)$是含x_0的一个开集（因A连续），且

$$A(U(x_0))=V(y_0),$$

因此

$$f\circ A=I_{E_1}:U(x_0)\xrightarrow{A}V(y_0)\xrightarrow{f}U(x_0)$$

$$A\circ f=I_{E_2}:V(y_0)\xrightarrow{f}U(x_0)\xrightarrow{A}V(y_0).$$

可见，算子 $A:U(x_0)\to V(y_0)$ 有唯一的连续逆算子 $f:V(y_0)\to U(x_0)$.

总结上述讨论，得到

定理 3.7.5 设算子 $A:D\to E_2$ 在 x_0 的某邻域内存在 F-导算子 $A'(x)$ 且 A' 在 x_0 处连续，如果 $A'(x_0)$ 有有界逆算子，则存在含 x_0 与 $y_0=Ax_0$ 的开集 $U(x_0)$ 与 $V(y_0)$ 使得算子 $A:U(x_0)\to V(y_0)$ 为一一对应且 A 与其逆算子

$$A^{-1}:V(y_0)\to U(x_0)$$

都连续.

由定理 3.7.4 及以上定理知：当 A 在 D 内有连续的 F-导算子 A' 且 $A'(x_0)$ 有有界逆算子时，存在开集 $U(x_0),V(y_0)$ 满足 $x_0\in U(x_0),y_0\in V(y_0)$ 且使得

(i) $A:U(x_0)\to V(y_0)$ 为连续的一一对应;

(ii) $A:U(x_0)\to E_2$ 有连续的 F-导算子;

(iii) $A^{-1}:V(y_0)\to E_1$ 有连续的 F-导算子.

习题 3.7

1. 设 $E_1=\mathbf{R}^n,E_2=\mathbf{R}^m,E_3=\mathbf{R}^m$，且

$$F_i:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,m)$$

是 m 个 $m+n$ 元函数，定义 $F:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 如下：

$$F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y),\cdots,F_m(x_1y)),$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$. 记

$$x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),\ y_0=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_m^{(0)}),$$

用隐算子定理证明：如果 $F_i(1\le i\le m)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续的偏导数

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i}(1\le i\le n,1\le j\le m)$$

且在 (x_0,y_0) 处,有

$$F_i(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},y_1^{(0)},\cdots,y_m^{(0)})=0(i=1,2,\cdots,m)$$

及

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则存在x_0的某邻域$U(x_0)$内定义的m个连续可微(即偏导数连续)的n元函数

$$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(1\le i\le m),$$

使得$y_i^{(0)}=f_i(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})(i=1,2,\cdots,m)$且

$$F(x,f_1(x),\cdots,f_m(x))=0,\ \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(x_0).$$

附 录

Ⅰ. 半序集与 Zorn 引理

顺序是数学中常用的概念与方法之一，以下介绍半序集的有关知识与反映半序集中极大元存在性的 Zorn 引理. 最后，应用 Zorn 引理给出泛函延拓定理(定理 2.2.1)的严格证明.

1.1 概念与例子

定义 1 设 S 是一非空集，如果在 S 中规定了某些元素之间的关系"$\prec$"，满足：

1．反身性：$\forall a\in S, a\prec a$；

2．反对称性：$\forall a,b\in S, a\prec b$ 且 $b\prec a\Rightarrow a=b$；

3．传递性：$\forall a,b,c\in S, a\prec b$ 且 $b\prec c\Rightarrow a\prec c$，

则称关系"$\prec$"是 S 中的一个顺序；此时,称 $(S,\prec)$ 为一个半序集，简称 S 为半序集.

例 1 设 $S\subset R$ 非空，在 S 中规定：

$$x\prec y\Leftrightarrow x-y\geq 0.$$

显然 S 成为一个半序集，称这种顺序为实数之间的自然顺序.

例 2 设 A 是非空集，$S=\{E\mid E\subset A\}$（即 A 是一切子集之集. 在 S 中规定：

$$E\prec F\Leftrightarrow E\subset F$$

易见这是 S 中的一个顺序，从而 S 成为一个半序集，这种顺序称为集合之间的自然顺序.

例 3 设 A 是全体实数列之集，在 A 中规定：

$$\{x_n\}\prec\{y_n\}\Leftrightarrow\forall n\in N, x_n\leq y_n,$$

则它定义了 A 中的一个顺序，称之为实数列之间的自然顺序.

例 4 设 X 是非空集，S 是一切实值函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 之集，在 S 中规定：

$$f\prec g\Leftrightarrow\forall x\in X, f(x)\leq g(x)$$

则它是 S 中的一个顺序，称为函数间的自然顺序.

例 5 在复数域 $\mathbf{C}$ 中规定：

$$a+bi\prec c+di\Leftrightarrow a<c \text{ 或 } a=c \text{ 但 } b\leq d,$$

则 $\mathbf{C}$ 成为一个半序集，称这种顺序为字典顺序（因它与汉语字典的拼间排列法类似）. 例如 $2+3i$ 与 $3+2i$ 有关系：$2+3i\prec 3+2i$, 又如 $2+3i\prec 2+5i$.

在一个半序集 A 中，如果元素 a 与 b 满足 $a\prec b$ 或 $b\prec a$ 之一，则称 a 与 b 是

可以比较的；当$a \prec b$时，称a先于b或称a在b前，b在a后．例如，例 1 与例 5 的半序集中任意两个元素都可以比较，但例 2、例 3、例 4 则不然，除非例 2 中的A与例 4 中的X是单点集．由此引入以下定义.

定义 2 若半序集S中的任意两个元素都可以比较，则称S是一个全序集．如果B是半序集S的非空子集且以S中的顺序，B成为一个全序集，则称B是全序子集.

例如，例 1 与例 5 中的半序集为全序集，例 3 的A不是全序集，但它有全序子集：

$$B=\{\alpha_i \mid \alpha_i=(i,i+1,i+2,\cdots)(i\in \mathbf{N})\},$$

在B中$\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \alpha_3 \prec \cdots$.

定理 3 设S为一半序集，B为S的一个子集．如果存在$a\in S$使的$\forall b\in B$都有$b \prec a$，则称B是有上界的且称a为B在S中的一个上界．如果存在$b\in B$使得：

$$\forall x\in B, b\prec x \Rightarrow x=b,$$

则称b是B的一个极大元．类似定义下界与极小元.

显然，若a是B在S中的一个上界且$a\in B$，则a是B的极大元；若B是S的一个全序子集，且b是B的极大元，则b也是B的一个上界,

例如，例 2 中的A既是S的上界又是S的极大元，又如在

$$S=\{x \mid 0<x<1\text{且}x\in \mathbf{R}\}$$

中定义

$$B=\left\{\frac{1}{n+1}:n=1,2,\cdots\right\}\cup\left\{1-\frac{1}{n+1}:n=1,2,\cdots\right\},$$

则依实数间的自然顺序，B在S中既无上界又无下界，因而B没有极大元与极小元.

1.2 Zorn 引理

一个半序集何时必有极大元呢？显然，如果半序集S有极大元a，则a是S的任一含有a的全序子集B的上界．反之,如果半序集S的任一全序集都有上界，那么S是否必有极大元呢？

如果以问题回答是否定的，则对任一$a_1\in S$,由于a_1不是S的极大元，从而存在$a_2\in S, a_2\neq a_1$使$a_1<a_2$,又a_2不是S的极大元，则存在$a_3\in S$，使$a_3\neq a_2$，且$a_2<a_3$．如此断续, 可得S的一个全序子集

$$B_0=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

满足：

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots. \tag{1}$$

依假设，它有上界$a_\omega \in S$，但a_ω也不是S的极大元，于是存在$a_{\omega+1} \in S$使

$$a_{\omega+1} \neq a_\omega \text{ 且 } a_\omega < a_{\omega+1}.$$

类似于上边的推导，可得S的一个全序子集：

$$B_1 = \{a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \cdots, a_{\omega+n}, \cdots\}$$

满足：

$$a_\omega < a_{\omega+1} < a_{\omega+2} < \cdots < a_{\omega+n} < \cdots \quad (2)$$

它又有上界$a_{2w} \in S$. 类似地可得S的全序子集

$$B_2 = \{a_{2\omega}, a_{2\omega+1}, a_{2\omega+2}, \cdots, a_{2\omega+n}, \cdots\}$$

满足：

$$a_{2\omega} < a_{2\omega+1} < a_{2\omega+3} < \cdots < a_{2\omega+n} < \cdots. \quad (3)$$

如此继续，可得到S的“没完没了”的无穷全序子集$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$其元素满足：

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_\omega < a_{\omega+1} < \cdots < a_{2\omega}$$
$$< a_{2\omega+1} < \cdots < a_{3\omega} < a_{3\omega+1} < \cdots.$$

这个全序子集必无上界，这与假设是不相容的，由此可见，此时S必有极大元. 于是,我们得到以下结果.

定理 1(Zorn 引理) 设半序集S的任一全序子集都有上界,则S必有极大元.

Zorn 引理肯定了极大元的存在性，是研究“无限过程”的一个重要工具，在泛函分析、抽象代数与半序集理论中常常用到，但上面的分析只能帮助读者对这一引理的认识与理解，决非逻辑上严格论证. 由于它反映的事实如此简单直观，因而在数学上将它作为一个公理来接受.

Zorn 引理有许多等价形式. 例如，它等价于以下的选择公理.

选择公理 设S是一族两两互不相交的非空集，那么存在一个集A满足：

1. $A \subset \bigcup_{M \in S} M$；

2. $\forall M \in S, A \cap M$ 是单点集.

选择公理保证了我们可在S中的每个集M中任意选取一个元素，构成一个新的集合A.

应用 Zorn 引理，可以给出泛函延拓定理(定理 2.2.1)的严格证明.

II. 泛函延拓定理的证明

泛函延拓定理 设X是实的线性空间，f是定义在X的子空间Z上的实线

性泛函，如果存在 X 上的次线性泛函 p 使得 $p(x) \geq f(x)(\forall x \in Z)$，则存在 X 上的实线性泛函 $\tilde{f}$ 满足：

(i) 当 $x \in Z$ 时, $\tilde{f}(x) = f(x)$,即 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓;

(ii) 当 $x \in X$ 时，$\tilde{f}(x) \leq p(x)$ 即 $\tilde{f}$ 仍被 p 控制.

证明 设 S 是所有满足以下条件下的实线性泛函 $F : D(F) \to \mathbf{R}$ 之集:

$$\forall x \in D(F), F(x) \leq p(x) \text{且} \forall x \in Z, F(x) = f(x).$$

对任二元 $F_1, F_2 \in S$，定义

$$F_1 \prec F_2 \Leftrightarrow D(F_1) \subset D(F_2).$$

由于 $f \in S$，从而 $S \neq \varnothing$. 易见，依以上面顺序构成为一个半序集.

设 B 是 S 的任一全序子集，定义

$$D(g) = \bigcup_{F \in B} D(F).$$

$\forall x \in D(g), y \in D(g)$, 设 $x \in D(F_1), y \in D(F_2)$（其中 $F_1, F_2 \in B$）. 由于 B 是全序的，从而

$$D(F_1) \subset D(F_2) \text{与} D(F_1) \supset D(F_2)$$

之一成立，设 $D(F_1) \subset D(F_2)$，于是 $x, y \in D(F_2)$，由于 $D(F_2)$ 是 X 的子空间，因此，$\forall \alpha, \beta \in R$ 有

$$\alpha x + \beta y \in D(F_2) \subset D(g).$$

故 $D(g)$ 是 X 的子空间. $\forall x \in D(g)$，定义

$$g(x) = F_1(x), \quad x \in D(F_1).$$

由于 B 是全序的，从而当 $x \in D(F_1) \cap D(F_2)$ 时，有

$$D(F_1) \supset D(F_2) \text{或} D(F_1) \subset D(F_2),$$

且 $F_1(x) = F_2(x)$. 可见 $g(x)$ 由 x 唯一确定，这说明以上对 g 的定义又是合理的. 于是,得到泛函 $g : D(g) \to \mathbf{R}$. 易见, $g \in S$ 且 $\forall F \in B$ 有 $F < g$, 因而 B 有上界. 由 Zorn 引理知 S 必有极大元 M. 若 $D(M) \neq X$，则任取 $x_0 \in X \setminus D(M)$. 由定理 2.2.1 之证的前半部分知：存在实线性空间

$$V = \operatorname{span}(\{x_0\} \cup D(M))$$

上的实线性泛函 F 使得

$$\forall x \in D(M), F(x) = M(x); \forall x \in V, F(x) \leq p(x).$$

从而当 $x \in Z$ 时，$F(x) = f(x)$；当 $x \in V$ 时，$F(x) \leq p(x)$，可见 $F \in S$. 但 $F \neq M$ 且 $M \prec F$，这与 M 是 S 的极大元矛盾. 因此,必有 $D(M) = X$. 记 $\tilde{f} = M$，则 $\tilde{f}$ 定义在 X 上且是实线性泛函，满足(i)与(ii). 证毕.

III. 算子谱论简介

在数学物理、微分方程与积分方程等问题的研究中，常常用到形如

$$(\lambda I - T)x = 0$$

的齐次方程与形如

$$(\lambda I - T)x = y$$

的非次方程，其中 T 为某个空间上的算子，y 是已知向量，x 是未知向量，λ 是实数或复数，I 是相应空间上的恒等算子.

为了研究这种方程解的存在性、唯一性与稳定性,自然引入算子 T 的正则点与谱点. 关于这方面的研究，形成了泛函分析的一个重要分支—算子谱理论. 由于篇幅所限,以下仅介绍一些基本概念与主要结论,有关定理的证明也只好略去.

3.1 正则点与谱点

设 X 是一复的赋范空间，$B(X)$ 是 X 上全体有界线性算子构成的赋范代数.

定义 1 设 $T \in B(X), \lambda \in \mathbf{C}$ 如果 $\lambda I - T$ 有有界的逆算子，则称复数 λ 是算子 T 的正则点；否则（即 $\lambda I - T$ 无有界逆算子），称 λ 为 T 的谱点. 记 $\rho(T)$ 是 T 的全体正则点之集，$\sigma(T)$ 是 T 的谱，当 $\lambda \in \rho(T)$ 时，称算子

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$$

为 T 的豫解算子(或豫解式).

显然 $\sigma(T) = \mathbf{C} - \rho(T)$，由定理 3.3.6 知:当 X 完备时,正则集 $\rho(T)$ 恒为开集，而谱 $\sigma(T)$ 是 $\mathbf{C}$ 的紧子集；且当 X 非零时，$\sigma(T) \neq \varnothing$.

定义 2 设 $T \in B(X), \lambda \in \sigma(T)$.

(i) 如果 $\lambda I - T$ 不是单射(即 $(\lambda I - T)x = 0$ 有非零解)，则称 λ 是 T 的特征值(或称 λ 为 T 的点谱)，此时称 $(\lambda I - T)x = 0$ 的非零解 x 为 T 相应于特征值 λ 的特征向量；

(ii) 如果 $\lambda I - T$ 是单射(即 $(\lambda I - T)x = 0$ 只有零解)，则称 λ 为 T 连续谱.

算子 T 的所有特征值之集记为 $\sigma_p(T)$，所有连续谱之集记为 $\sigma_c(T)$，于是

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T).$$

显然 λ 是 T 的连续谱，又可分两种情况：

(a) $\lambda I - T$ 是单射但不是满射，即 $(\lambda I - T)x = 0$ 只有零解，但对某些 $y \in X, (\lambda I - T)x = y$ 无解.

(b) $\lambda I - T$ 既单且满(即为一一对应)，但 $(\lambda I - T)^{-1}$ 无界. 这时，对每个

$y\in X$，方程$(\lambda I-T)x=y$都有唯一解，但解不稳定，即当y变化很小不能保证解x也变化很小.

由 Banach 逆算子定理可知，当X完备时，情况(b)不会出现.

例 1 设$T\in B(\mathbf{C}^n)$，则$\sigma(T)=\sigma_p(T)$.

由于$\mathbf{C}^n$是有限维的，从而$\lambda I-T$的单射$\Leftrightarrow$它是满射，于是定义 2 中的(ii)不会出现，从而T只有点谱，无连续谱.

例 2 设$X=l^2(\mathbf{C})$,定义：$T:X\to X$如下：

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

显然$T\in B(X)$且$\|T\|=1$，称T为$l^2(\mathbf{C})$上的单侧移位算子.

当$\lambda=0,(\lambda I-T)x=-Tx=0\Leftrightarrow x=0$，因而 0 不是$T$的点谱（即特征值）.

当$\lambda\neq 0$时，$(\lambda I-T)(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$当且仅当

$$\lambda\xi_1=\lambda\xi_2-\xi_1=\lambda\xi_3-\xi_2=\cdots=\lambda\xi_{n+1}-\xi_{n0}=\cdots=0$$

即$\xi_n=0(n=1,2,\cdots)$，因而$\lambda\notin\sigma_p(T)$，故$\sigma_p(T)=\varnothing$，即T无特征值，因此$\sigma(T)=\sigma_c(T)$. 由于当$\lambda=0$时，

$$(\lambda I-T)X\neq X,$$

从而$0\in\sigma_c(T)$.

例 3 设$l^\circ(\mathbf{C})$是$l^1(\mathbf{C})$中只有有限个坐标不为 0 的数列全体之集，定义：$T:l^\circ(\mathbf{C})\to l^\circ(\mathbf{C})$如下

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=\left(\frac{\xi_1}{3},\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\cdots,\frac{\xi_n}{n},\cdots\right),$$

则关于$l^1(\mathbf{C})$中的范数，T是有界线性算子且范数$\|T\|\le 1$，显然T^{-1}存在且，

$$T^{-1}x=(\xi_1,2\xi_2,\cdots,n\xi_n,\cdots),\quad \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\circ(\mathbf{C})$$

取$e_n=\{\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n},1,0,\cdots\}$，则$e_n\in l^\circ(\mathbf{C}),\|e_n\|=1$且

$$\|T^{-1}e_n\|=\|(0,0,\cdots,0,n,0,\cdots)\|=n(n=1,2,\cdots).$$

可见，T^{-1}无界，因此$0\in\delta_c(T)$.

3.2 谱半径

设$T\in B(X)$，称

$$r(T)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(T)\}$$

为T的谱半径.由定理 2.5.3 的推论 2 知：$r(T)\le\|T\|$.

例如$r(0)=0, r(I)=1$.

定理 1 设 X 为复的 Banach 空间，则

(i) $\forall T\in B(X), r(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=\inf\limits_{n}\sqrt[n]{\|T^n\|}$;

(ii) $\forall A,B\in B(X)$ 且 $AB=BA$ 有

$$r(AB)\le r(A)\cdot r(B), r(A+B)\le r(A)+r(B).$$

3.3 紧算子的谱理论

关于紧算子的谱理论有比较深刻的结果，这就是所谓 Riesz—shauder 理论，其主要结果如下.

定理 2 设T为复 Banach 空间 X 上的有界线性算子，如果T是紧算子，则

(i) 当$\dim X=\infty$时，0是T的谱点;

(ii) T的非零谱点必是特征值;

(iii) 当$\lambda\ne 0$是T的特征值时，T的相应于λ的全体特征向量与零向量生成一个有限维线性空间(是 X 的子空间).

(iv) 相应于的不同特征值的特征向量线性无关;

(v) $\sigma(T)$要么是有限集，要么以0为聚点的可数集;

(vi) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$;

(vii) 当$\lambda\ne\mu$时，T相应于特征值λ的特征向量x与T^*相应于特征值μ的特征向量$f\in X^*$正交，即$f(x)=0$;

(viii) 当λ为T的非零特征值时，方程

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解$\Leftrightarrow$ y与T^*的相应于λ的特征向量f正交即$f(y)=0$.

参考书目

1. 夏道行等编，实变函数论与泛函分析(下)，北京: 人民教育出版社.
2. 郑维行等编，实变函数论与泛函分析概要(二)，北京: 人民教育出版社.
3. 郭大钧，非线性泛函分析，济南: 山东科学技术出版社.
4. 程其襄等编，实变函数与泛函分析基础，北京: 高等教育出版社.
5. 关肇直等编，线性泛函分析入门，上海: 上海科技出版社.
6. J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985.

[General Information]
书名=泛函分析引论
作者=曹怀信主编
页数=174
SS号=12023244
DX号=
出版日期=2006.8
出版社=陕西师范大学出版社